

# **Introdução à Topologia Diferencial**

# Prefácio

Existe, em Matemática, uma disciplina bastante extensa e geral, chamada Topologia, que se ocupa da noção de função contínua no seu sentido mais lato. Isto é, seu âmbito é a categoria de todos os espaços topológicos. Ora, em que pese a importância e a adequabilidade desse conceito, é impossível demonstrar um teorema não trivial sobre um espaço topológico qualquer, dada a extrema variedade de espécies contidas no gênero em questão. Assim, para poder trabalhar honestamente, o topólogo precisa impor restrições ao tipo de espaços que vai considerar. Segundo a natureza dessas restrições, e também segundo o tipo de instrumentos auxiliares empregados, podemos destacar os seguintes ramos da Topologia.

a) *Topologia Geral*. Aqui, as restrições impostas aos espaços topológicos consistem em acrescentar um ou mais axiomas que se referem diretamente aos conjuntos abertos do espaço, ora garantindo a existência de um número suficientemente grande deles (axiomas de separação), ora evitando que existam abertos demais (compacidade), etc. De qualquer maneira, o que caracteriza a Topologia Geral

é que os espaços que ela estuda não possuem outra “estrutura” senão a de espaço topológico, nem são empregados novos instrumentos de trabalho, senão praticamente aqueles provenientes da Teoria dos Conjuntos.

b) *Topologia Combinatória*. Aqui são estudados tipos especiais de espaços topológicos, os poliedros, os quais são dotados de uma estrutura adicional, que poderíamos chamar de “localmente afim”. Um poliedro é uma reunião finita de vértices, segmentos de reta, triângulos, tetraedros, etc., objetos genericamente designados com o nome de “simplexos”, os quais se acham regularmente dispostos, como num poliedro comum de espaço euclidiano. Considerando-se (num certo sentido!) a topologia de um simplexo do espaço euclidiano como trivial, resulta que, para estudar a topologia de um poliedro, não é necessário penetrar no âmago de cada um dos seus blocos constituintes, os simplexos, mas apenas olhar para cada um deles como um elemento e ver como eles estão dispostos uns relativamente aos outros (como os blocos de um brinquedo de montar) para constituir o poliedro. Conclui-se então que, sob este ponto de vista global, a noção básica na topologia dos poliedros é o conceito de *incidência* (tal segmento é lado de quais triângulos?, tal triângulo é face de quais tetraedros?), mediante o qual passa-se de um poliedro para o seu esquema abstrato, formado por um número finito de objetos, ligados por uma relação única, de incidência. O estudo deste esquema é, então, um problema combinatório, donde o nome deste ramo da Topologia.

c) *Topologia Algébrica*. O que distingue a Topologia Algébrica da Topologia Geral e da Topologia Combinatória (bem como da Topologia Diferencial, que abordaremos em

seguida), não é a natureza dos espaços que ela considera, nem as estruturas adicionais que existam ou deixem de existir nesses espaços, mas antes de tudo, o método de trabalho. A Topologia Algébrica é, às vezes, mais geral do que a Topologia Geral pois nela se consegue demonstrar teoremas não triviais que se aplica, a todos os espaços topológicos. Por outro lado (e aqui reside o motivo do paradoxo acima), a Topologia Algébrica não é exatamente um ramo da Topologia, mas um método de transição desta para a Álgebra. A idéia básica é a seguinte. As estruturas algébricas são, em geral, mais simples do que as estruturas topológicas. Por exemplo, determinar se dois grupos abelianos dados são ou não isomorfos (principalmente quando eles são finitamente gerados) é, quase sempre, um problema mais simples do que o de determinar se dois espaços topológicos dados são homeomorfos ou não. Uma vez admitida esta máxima, adquire grande interesse todo processo que permita substituir, sistematicamente, espaços topológicos por grupos (por exemplo) e funções contínuas por homomorfismos, de modo que se dois espaços são homeomorfos, então os grupos a eles associados por esse processo são isomorfos. (Não se pode esperar a validade da recíproca, pois isto implicaria que a estrutura geral dos grupos seria tão complicada como a estrutura geral dos espaços topológicos). Um processo desse tipo é o que se chama um “functor” definido numa categoria topológica, com valores numa categoria algébrica. A Topologia Algébrica se ocupa do estudo desses funtores. cujos exemplos mais conhecidos são os grupos de homologia e de homotopia.

d) *Topologia Diferencial*. Este ramo da Topologia caracteriza-se pela estrutura adicional dos espaços topológicos

de que se ocupa (variedades diferenciáveis) e, consequentemente, pelos métodos de trabalho, que são, inicialmente, aqueles do Cálculo Diferencial e Integral clássico, coadjuvados pelos resultados da Topologia Algébrica. Trata-se aqui de um retorno às origens do assunto pois, como se sabe, na primeira das memórias em que Poincaré desenvolveu as bases da moderna Topologia, os espaços topológicos por ele considerados eram subvariedades do espaço euclidiano, “homeomorfismo” para ele era o que hoje chamamos “difeomorfismo”, e o espírito com que Poincaré escreveu essa memória, motivada sem dúvida por problemas de Análise, é o precursor do espírito atual da Topologia Diferencial. Posteriormente é que, devido a razões puramente técnicas, ele abandonou o ponto de vista diferencial, em prol do método combinatório, por falta de recursos adequados de Topologia Geral, entre os quais destaca-se a “passagem do local ao global” permitida pela noção recente de espaço para-compacto.

Estas notas, representam uma versão elaborada de um curso dado no 3º Colóquio Brasileiro de Matemática, em Fortaleza, Ceará. Elas são o que o título diz: uma introdução à Topologia Diferencial. Não são inteiramente auto-suficientes, pois pressupõem do leitor alguma familiaridade com as noções mais elementares sobre Variedades Diferenciáveis, as quais podem ser encontradas na bibliografia citada no Capítulo I.

O Capítulo II contém a classificação homotópica das aplicações contínuas de uma variedade de dimensão  $n$  na esfera  $S^n$ . O Capítulo III demonstra que a soma dos índices das singularidades de um campo vetorial “genérico” sobre uma variedade compacta  $M$  é um invariante de  $M$ , cha-

mado a característica de Euler. O Capítulo IV demonstra o Teorema da Curvatura Íntegra. Para chegar até estes resultados, várias idéias e técnicas importantes são introduzidas, como a aproximação de funções e homotopias contínuas por outras diferenciáveis, a noção de grau, a integração de formas diferenciais, o conceito de transversalidade, o número de interseção de duas subvariedades, etc.

A rigidez implacável do prazo em que estas notas deveriam estar prontas não permitiu dar-lhes, como era a intenção inicial, um ritmo de exposição mais sossegado. Neste particular, o pecado mais grave é a falta de um desenvolvimento adequado para os 3 exemplos do fim do Capítulo III.

Meus agradecimentos a Wilson Góes, pelo tempo récorde com que datilografou o trabalho.

Brasília, 21 de junho de 1961

Elon Lages Lima

# Prefácio da segunda edição

Além de algumas correções e pequenas modificações, esta nova edição contém os parágrafos 5 e 6 do Capítulo III, em substituição aos 3 exemplos finais daquele capítulo, que existiam na 1ª edição. Tais parágrafos introduzem o conceito de índice de uma singularidade isolada qualquer de um campo vetorial contínuo, e demonstram que toda variedade cuja característica de Euler é zero admite um campo vetorial contínuo sem singularidades. Gostaria de agradecer a Oscar Valdivia e Augusto Wanderley, que corrigiram os originais desta edição e a Guilherme de la Penha, que fez os desenhos do texto. A feitura desta trabalho contou com o apoio do Air Force Office of Scientific Research.

Rio de Janeiro, 1º de outubro de 1961

Elon Lages Lima

# Sumário

<b>I</b>	<b>Variedades Diferenciáveis</b>	<b>1</b>
<b>II</b>	<b>Homotopia</b>	<b>16</b>
1	Introdução . . . . .	16
2	Homotopias em variedades diferenciáveis . . .	23
3	O conceito de grau . . . . .	28
4	Grau como razão entre volumes . . . . .	37
5	Classificação homotópica de aplicações . . .	61
6	Variedades não orientáveis . . . . .	79
<b>III</b>	<b>Campos Vetoriais</b>	<b>88</b>
1	Generalidades e um teorema de Poincaré e Brouwer . . . . .	88
2	O espaço fibrado tangente . . . . .	98
3	Transversalidade e suas aplicações . . . . .	106
4	A característica de Euler de uma variedade .	124
5	A noção de grau local . . . . .	134
6	Índice de uma singularidade isolada . . . . .	140
<b>IV</b>	<b>Curvatura Integral</b>	<b>152</b>
1	Introdução . . . . .	152
2	Curvatura gaussiana de uma hipersuperfície	153



3	O grau da aplicação normal . . . . .	158
4	O Teorema da Curvatura Íntegra . . . . .	160
5	Observações a respeito do teorema . . . . .	161

<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>165</b>
-----------------------------------	------------

# Capítulo I

## Variedades Diferenciáveis

Neste capítulo, faremos uma rápida revisão dos conceitos e resultados básicos sobre Variedades Diferenciáveis que serão usados nos capítulos seguintes. Não temos o intuito de fazer uma exposição sistemática nem completa desses preliminares. Sempre que for possível, damos as indicações bibliográficas necessárias para que o leitor encontre as demonstrações aqui omitidas. De um modo geral, as referências para este capítulo são Chern [4], Milnor [15], Pontrjagin [19], Hönig [7], e as notas do autor [13]. (Vide lista de referências bibliográficas no fim deste volume. Os números entre colchetes referem-se a essa lista). Estes são textos expositórios sobre Variedades. Certas demonstrações podem também ser encontradas em [25].

Um *sistema de coordenadas* locais num espaço topológico  $M$  é um homeomorfismo  $x: U \rightarrow R^n$  de um aberto  $U \subset M$  sobre um subconjunto aberto  $x(U)$  do espaço

euclidiano  $R^n$ ; se  $p \in U$  e  $x(p) = (x^1, \dots, x^n)$ , os números  $x^1, \dots, x^n$  chamam-se as coordenadas de  $p$  relativamente ao sistema  $x$ .

Um atlas de dimensão  $n$  sobre um espaço topológico  $M$  é uma coleção  $\mathcal{A}$  de sistemas de coordenadas locais  $x: U \rightarrow R^n$  tais que os abertos  $U$  cobrem  $M$ .

Um atlas  $\mathcal{A}$  sobre um espaço topológico  $M$  diz-se *diferenciável* se, para todo par de sistemas de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$ ,  $y: V \rightarrow R^n$  em  $\mathcal{A}$ , tais que  $U \cap V \neq \emptyset$ , o homeomorfismo  $y \circ x^{-1}: x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ , chamado *mudança de coordenadas*, é uma aplicação diferenciável do aberto  $x(U \cap V) \subset R^n$  sobre o aberto  $y(U \cap V) \subset R^n$ .

**Advertência:** Neste capítulo, e nos seguintes, “diferenciável” significa  $C^\infty$ , ou seja, “infinitamente diferenciável”.

Se um atlas  $\mathcal{A}$ , de dimensão  $n$ , é diferenciável, então todas as mudanças de coordenadas  $y \circ x^{-1}$ , relativas a sistemas  $x, y \in \mathcal{A}$ , são difeomorfismos (isto é, o homeomorfismo inverso,  $x \circ y^{-1}$ , sendo também uma mudança de coordenadas, é diferenciável). Em particular, se  $y \circ x^{-1}: (x^1, \dots, x^n) \rightarrow (y^1, \dots, y^n)$ , então o jacobiano  $\det(\partial y^i / \partial x^j)$  é  $\neq 0$  em todos os pontos onde é definido.

Seja  $\mathcal{A}$  um atlas diferenciável, de dimensão  $n$ , sobre um espaço topológico  $M$ . Um sistema de coordenadas locais  $z: W \rightarrow R^n$ , em  $M$ , diz-se *admissível* relativamente a  $\mathcal{A}$  se, para todo sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$ , em  $\mathcal{A}$ , com  $U \cap W \neq \emptyset$ , as mudanças de coordenadas  $z \circ x^{-1}: x(U \cap W) \rightarrow z(U \cap W)$  e  $x \circ z^{-1}: z(U \cap W) \rightarrow x(U \cap W)$  são diferenciáveis. Um atlas  $\mathcal{A}$ , sobre  $M$ , diz-se *máximo* quando contém todos os sistemas de coordenadas locais em  $M$  que são admissíveis relativamente a  $\mathcal{A}$ .

Todo atlas diferenciável está contido num único atlas diferenciável máximo: basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas locais admissíveis.

Uma *variedade diferenciável* de dimensão  $n$  é um espaço de Hausdorff  $M = M^n$ , com base enumerável, munido de um atlas máximo diferenciável, de dimensão  $n$ .

### Exemplos de variedades diferenciáveis

1. **O espaço euclidiano  $R^n$ .** Seja  $\mathcal{A}_0$  o atlas diferenciável sobre  $R^n$ , formado pelo único sistema de coordenadas  $x = \text{identidade}: R^n \rightarrow R^n$ . Seja  $\mathcal{A}$  o atlas máximo diferenciável sobre  $R^n$  que contém  $\mathcal{A}_0$ . O espaço  $R^n$ , munido do atlas  $\mathcal{A}$ , é uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ .

2. **Subconjuntos abertos.** Todo subconjunto aberto  $A$  de uma variedade diferenciável  $M^n$  possui, de modo natural uma estrutura de variedade diferenciável de mesma dimensão  $n$ . Basta tomar sobre  $A$  o atlas máximo diferenciável formado pelos sistemas de coordenadas locais  $x: U \rightarrow R^n$ , pertencentes ao atlas máximo de  $M^n$ , tais que  $U \subset A$ . Assim por exemplo, se considerarmos a variedade diferenciável  $M(n, R)$ , formada por todas as matrizes reais quadradas  $n \times n$  (ela não é senão a variedade  $R^{n^2}$  em nova roupagem), e o subconjunto aberto  $GL(n, R) \subset M(n, R)$ , formado pelas matrizes  $n \times n$  de determinante diferente de zero, vemos que  $GL(n, R)$  possui uma estrutura natural de variedade diferenciável de dimensão  $n^2$ . Na realidade, a estrutura mais simples possível:  $GL(n, R)$  é um aberto do espaço euclidiano  $R^{n^2}$ . Como se sabe, as matrizes  $x \in GL(n, R)$  são precisamente aquelas que possuem inverso. Notemos que  $GL(n, R)$  possui exatamente duas

componentes conexas, uma delas formada pelas matrizes cujo determinante é  $> 0$ , e a outra, pelas matrizes que têm determinante  $< 0$ .

3. **As esferas  $S^n$ .** Dada  $n > 0$ ,  $S^n$  é a esfera unitária  $n$ -dimensional, definida como o subconjunto  $S^n \subset R^{n+1}$ , formado pelos vetores  $x = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in R^{n+1}$  de módulo (= norma) unitária:  $|x|^2 = x^1x^1 + \dots + x^{n+1} \cdot x^{n+1} = 1$ . Obteremos sobre  $S^n$  um atlas diferenciável  $\mathcal{A}_0$ , com dois sistemas de coordenadas locais. Sejam  $p = (0, \dots, 0, 1)$  o polo norte de  $S^n$  e  $q = (0, \dots, 0, -1)$  o polo sul. Os sistemas de coordenadas serão as chamadas *projeções estereográficas*:  $\varphi: S^n - p \rightarrow R^n$  e  $\psi: S^n - q \rightarrow R^n$ . Teremos  $\varphi(S^n - p) = R^n$  e  $\psi(S^n - q) = R^n$ . Definamos  $\varphi$ . Para cada ponto  $x = (x^1, \dots, x^{n+1})$ , diferente de  $p$ ,  $\varphi(x) = y = (y^1, \dots, y^n) \in R^n$  será o ponto de interseção do plano equatorial com a semi-reta  $\overrightarrow{px}$ . Uma fórmula explícita para  $\varphi$  é a seguinte  $\varphi(x) = y = (y^1, \dots, y^n)$ , onde  $y^i = x^i/(1 - x^{n+1})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Analogamente se define a projeção estereográfica  $\psi$ , e se calcula sua expressão analítica. É um trabalho de rotina inverter essas fórmulas e mostrar, por conseguinte, que  $\varphi$  e  $\psi$  são homeomorfismos, donde  $\mathcal{A}_0 = \{\varphi, \psi\}$  é um atlas. Verifica-se que  $\mathcal{A}_0$  é diferenciável, logo está contido num único atlas máximo  $\mathcal{A}$ , que define a estrutura diferenciável de  $S^n$ .

4. **As variedades de dimensão 1.** Existem essencialmente duas variedades diferenciáveis conexas de dimensão 1 que são o círculo  $S^1$  (ou seja, a “esfera unitária” de dimensão 1) e a reta  $R$ . Este é um resultado bem conhecido, mas raramente demonstrado em público. A única referência que conhecemos é o artigo de H. Kneser no “Bul-

letin de la Société Mathématique de Belgique”, 1958, o qual trata somente do caso  $C^0$  (isto é, considera a continuidade, mas não a diferenciabilidade).

**5. O produto cartesiano de duas variedades.** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis. A sua *variedade produto* é o espaço topológico  $M \times N$ , munido da estrutura de variedade diferenciável de dimensão  $m + n$ , fornecida pelos sistemas de coordenadas locais

$$x \times y: U \times V \rightarrow R^{m+n}, \quad x \times y(p, q) = (x(p), y(q)),$$

onde  $x: U \rightarrow R^m$  percorre um atlas sobre  $M$  e  $y: V \rightarrow R^n$  percorre um atlas sobre  $N$ . Os sistemas de coordenadas  $x \times y$  constituem evidentemente um atlas em  $M \times N$ , de dimensão  $m + n$ , contido num único atlas máximo que define a estrutura de variedade produto  $M^m \times N^n$ .

De acordo com nossa definição de variedade, o intervalo fechado  $I = [0, 1]$  não é uma variedade diferenciável. Com efeito, nenhum sistema de coordenadas locais em  $I$  poderia conter o ponto 0, nem o ponto 1, pois um aberto  $U \subset I$  que contenha, digamos o ponto 0, não pode ser homeomorfo a um subconjunto aberto da reta. Muitas vezes, no texto, teremos de considerar o espaço produto  $M \times I$ , de uma variedade diferenciável  $M^m = M$ , pelo intervalo  $I = [0, 1]$ . Como  $I$  não é uma variedade, não podemos usar o exemplo 5 para dotar o produto  $M \times I$  de uma estrutura de variedade diferenciável. O remédio é ampliar ligeiramente o conceito de variedade, de modo a incluir  $I$ , e portanto o produto  $M \times I$ .

Para obter o conceito de *variedade com bordo*, basta ampliar, na definição anterior a noção de sistema de coordenadas locais num espaço topológico  $M$ , admitindo que

$x: U \rightarrow R^n$  seja um homeomorfismo do aberto  $U \subset M$  sobre um aberto  $x(U)$  de  $R$  ou um aberto  $x(U)$  do semi-espaço  $R_0^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in R^n; x^n \geq 0\}$ . As noções de atlas, atlas diferenciável, atlas máximo, etc, são definidas do mesmo modo e o resultado da definição é um conceito mais geral de variedade diferenciável. Dada  $M^n$ , uma dessas variedades no sentido amplo, consideramos o subconjunto aberto  $A \subset M$  formado pelos pontos  $p \in M$  tais que existe um sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$ , com  $p \in U$ , e  $x(U) =$  aberto do espaço euclidiano  $R^n$ . O conjunto fechado  $\partial M = M - A$ , chama-se o *bordo* de  $M$ . Se  $\partial M$  for vazio,  $M$  será uma variedade no sentido estrito. Se  $\partial M \neq \emptyset$ , diremos que  $M$  é uma *variedade com bordo*. Neste caso, sendo  $\dim M = n$ ,  $\partial M$  é uma variedade diferenciável (sem bordo!) de dimensão  $n - 1$ , como facilmente se constata. Exemplo de variedade com bordo é o intervalo fechado  $I = [0, 1]$ , com  $\partial I$  consistindo dos pontos 0 e 1. Mais geralmente, a bola fechada  $B^n = \{x \in R^n; |x| = 1\}$  é uma variedade com bordo, com  $\partial B^n = S^{n-1}$ . Finalmente, se  $M^n$  é uma variedade sem bordo,  $M^n \times I$  é uma variedade com bordo, e  $\partial(M \times I) = (M \times 0) \cup (M \times 1)$ . (Vide [15], [16], [19]).

As únicas variedades com bordo que teremos ocasião de considerar serão as do tipo  $M \times I$ , onde  $M$  não possui bordo. A menos que o mencionemos explicitamente, o termo “variedade” significará “variedade diferenciável, sem bordo”.

Seja  $M^n$  uma variedade e  $p$  um ponto de  $M$ . Indiquemos com  $\mathfrak{X}_p$  o conjunto de todos os sistemas de coordenadas locais  $x: U \rightarrow R^n$ , em  $M$ , tais que  $p \in U$ . Um *vetor tangente* a  $M$  no ponto  $p$  é uma função  $v: \mathfrak{X}_p \rightarrow R^n$

tal que, dados  $x, y \in \mathfrak{X}_p$  se  $v(x) = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$  e  $v(y) = (\beta^1, \dots, \beta^n)$ , tem-se

$$\beta^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \cdot \alpha^i,$$

as derivadas parciais sendo as de mudança de coordenadas  $(x^1, \dots, x^n) \rightarrow (y^1, \dots, y^n)$ , calculadas no ponto  $x(p) \in R^n$ .

O conjunto  $M_p$  de todos os vetores tangentes a  $M$  no ponto  $p$  tem uma estrutura natural de espaço vetorial real, a soma  $u + v$  de dois vetores tangentes e o produto  $\lambda \cdot v$  de um número real por um vetor tangente sendo definidos como as funções  $u + v: \mathfrak{X}_p \rightarrow R^n$  e  $\lambda \cdot v: \mathfrak{X}_p \rightarrow R^n$  tais que  $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$  e  $(\lambda v)(x) = \lambda \cdot v(x)$ .

O *espaço vetorial tangente*  $M_p$  tem a mesma dimensão  $n$  da variedade  $M$ . Com efeito, a cada sistema de coordenadas  $x \in \mathfrak{X}_p$  podemos associar uma base de  $M_p$ , que indicaremos com  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ , os vetores tangentes  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  sendo definidos como funções  $\frac{\partial}{\partial x^i}: \mathfrak{X}_p \rightarrow R^n$  tais que  $\frac{\partial}{\partial x^i}(y) = \left\{ \frac{\partial y^1}{\partial x^i}(p), \dots, \frac{\partial y^n}{\partial x^i}(p) \right\}$  para todo  $y \in \mathfrak{X}_p$ . Verifica-se sem dificuldade que se trata realmente de uma base e, na realidade, dados  $v \in M_p$ ,  $x \in \mathfrak{X}_p$ ,  $v(x) = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$  se, e somente se,  $v = \alpha^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \alpha^n \frac{\partial}{\partial x^n}$ . Às vezes, para sermos mais precisos, escreveremos  $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)$  em vez de  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ , para salientar que estamos nos referindo a vetores de  $M_p$ , já que o sistema  $x: U \rightarrow R^n$  define uma base  $\frac{\partial}{\partial x^i}(q)$  para todos os espaços  $M_q$ ,  $q \in U$ .

Seja  $E$  um espaço vetorial de dimensão  $n$ . Seja  $\mathcal{B}$  o conjunto das bases (sempre trabalharemos com bases ordenadas!) de  $E$ . Definiremos em  $\mathcal{B}$  uma relação de equivalência. Diremos que duas bases  $\{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\{f_1, \dots, f_n\}$  do espaço



vetorial  $E$  são equivalentes (diremos, mais especificamente, que elas são coerentes) se  $e_j = \sum_{i=1}^n \alpha_j^i f_i$  ( $j = 1, \dots, n$ ), onde a matriz  $(\alpha_j^i)$  tem determinante  $> 0$ . É claro que  $\mathcal{B}$  vai repartir-se em duas classes de equivalência, pois uma matriz de mudança de bases ou tem determinante  $> 0$ , ou  $< 0$ . Uma *orientação* no espaço vetorial  $E$  é uma dessas classes de equivalência. Um espaço vetorial *orientado* é um par formado por um espaço vetorial  $E$  e uma orientação. As bases de  $E$  pertencentes a esta orientação serão chamadas *positivas* e as outras *negativas*.

Diremos que uma variedade diferenciável  $M^n$  é orientável quando for possível orientar cada espaço tangente  $M_p$ ,  $p \in M$ , de tal modo que a orientação dos  $M_p$  varie “continuamente” no sentido seguinte: se  $x: U \rightarrow R^n$  é um sistema de coordenadas locais em  $M$ , com  $U$  conexa, então a base  $\{\frac{\partial}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(p)\} \subset M_p$ , associada ao sistema  $x$ , ou é positiva para todo  $p \in U$ , ou então é negativa para todo  $p \in U$ . No primeiro caso, diremos que o sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$  é positivo, e escreveremos  $x > 0$ . No segundo caso, diremos que  $x$  é *negativo*, e poremos  $x < 0$ . Diremos que  $M$  está *orientada* quando se escolhe uma coleção de orientações nos espaços  $M_p$ , do tipo acima. Esta coleção é a *orientação* de  $M$ .

Nem toda variedade diferenciável é orientável. O espaço euclidiano (sendo, em particular, um espaço vetorial) é orientável. Todo subconjunto aberto de uma variedade orientável herda esta propriedade. A esfera  $S^n$  é orientável. Basta tomar uma orientação em  $R^n$  e orientar cada espaço tangente  $(S^n)_p$  de modo que uma base positiva de  $(S^n)_p$ , à qual se faz seguir ao último elemento a normal a  $(S^n)_p$  que

aponta para fora de  $S^n$ , dê uma base positiva de  $R^n$ .

Notemos que  $R^n$  possui uma orientação natural, definida pela base canônica  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , onde

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

O produto  $M^n \times N^n$  de duas variedades orientadas  $M$  e  $N$  possui uma orientação natural, chamada a *orientação produto*. Se  $\{e_1, \dots, e_m\}$  é uma base positiva de  $M_p$  e  $\{f_1, \dots, f_n\}$  é uma base positiva de  $N_q$ , diremos que  $\{e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n\}$  é uma base positiva de  $(M \times N)_{(p,q)}$ . Isto define a orientação produto em  $M \times N$ .

Sejam  $M^m, N^n$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  diz-se *diferenciável* num ponto  $p \in M$  quando, dado um sistema de coordenadas  $y: V \rightarrow R^n$ , em  $N$ , com  $f(p) \in V$ , existe um sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^m$  em  $M$ , com  $p \in U$ , tal que  $f(U) \subset V$  e a aplicação composta  $y \circ f \circ x^{-1}: x(U) \rightarrow y(V)$  é diferenciável no ponto  $p$ . É claro que, se isto acontecer com um  $y$  e um  $x$ , acontecerá com quaisquer outros  $x', y'$  tais que  $f(U') \subset V'$ . Diremos simplesmente que  $f$  é diferenciável se ela o for em todos os pontos de  $M$ .

Uma aplicação diferenciável  $f: M^m \rightarrow N^n$  induz, em cada ponto  $p \in M$ , uma aplicação linear  $f_*: M_p \rightarrow N_q$ ,  $q = f(p)$ . Às vezes, escreveremos  $f_p$  em vez de  $f_*$ , para deixar claro que estamos lidando com o ponto  $p$ . A definição de  $f_*$  é a seguinte: tomemos um sistema de coordenadas  $y: V \rightarrow R^n$  em  $N$ , com  $p \in V$ . Seja  $x: U \rightarrow R^m$  um sistema de coordenadas em  $M$ , com  $p \in U$ , tal que  $f(U) \subset V$ . Dado um vetor  $v \in M_p$ , escrevamos  $v = \sum_{j=1}^m \alpha^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ , e ponhamos

$f_*(v) = \sum_{i=1}^n \beta^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ , onde  $\beta^i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \alpha^j$  ( $i = 1, \dots, n$ ). É fácil ver que  $f_*$  é linear e que a definição de  $f_*$  não depende das escolhas de sistemas de coordenadas feitas.

Dada uma aplicação diferenciável  $f: M^m \rightarrow N^n$ , diremos que um ponto  $p \in M$  é um *ponto regular* de  $f$  se  $f_*: M_p \rightarrow N_q$ ,  $q = f(p)$ , é uma aplicação linear biunívoca. Isto, naturalmente, obriga  $m \leq n$ . Diremos que um ponto  $q \in N$  é um *valor regular* da aplicação diferenciável  $f: M^m \rightarrow N^n$  se, para cada  $p \in F^{-1}(q)$ , a aplicação linear  $f_*: M_p \rightarrow N_q$  for sobre o espaço vetorial  $N_q$ . Da maneira como esta definição está formulada, se  $f^{-1}(q)$  for vazio,  $q$  será automaticamente um valor regular de  $f$ . Se, porém,  $q \in N$  é um valor regular de  $f$  com  $f^{-1}(q) \neq \emptyset$ , então  $m \geq n$ .

Se uma aplicação diferenciável  $f: M^m \rightarrow N^n$  é tal que todos os pontos  $p \in M$  são pontos regulares de  $f$ , diremos que  $f$  é uma *aplicação regular*. (Não daremos nome especial a uma aplicação  $f: M \rightarrow N$  tal que todo ponto  $q \in N$  é um valor regular de  $f$ . Se tivéssemos de adotar um nome especial, diríamos que  $f$  é uma “fibrção”).

Uma *imersão* de uma variedade  $M^m$  numa variedade  $N^n$  é uma aplicação diferenciável regular  $f: M^m \rightarrow N^n$  que é, além disso, um homeomorfismo de  $M$  em  $N$ .

Uma *subvariedade*  $S^s$  de uma variedade  $M^m$  é um subconjunto  $S^s \subset M^m$ , o qual possui uma estrutura própria de variedade diferenciável, relativamente à qual a aplicação de inclusão  $\varphi: S \subset M$  é uma imersão. Por exemplo: as “superfícies regulares” do espaço euclidiano  $R^n$  são subvariedades deste espaço. Um *difeomorfismo*  $f: M^n \rightarrow N^n$  é um homeomorfismo diferenciável cujo inverso também é

diferenciável.

Um fato básico acerca de imersões é o seguinte:

**Teorema 1** (Whitney). *Dada uma variedade diferenciável  $M^n$ , existe sempre uma imersão  $f: M^n \rightarrow R^{2n+1}$ .*

Na realidade, quando  $M$  é compacta, qualquer aplicação contínua  $g: M^n \rightarrow R^{2n+1}$  pode ser arbitrariamente aproximada por uma imersão. Este resultado de aproximação é ainda válido para variedades não compactas, desde que enfraqueçamos a definição de “imersão”, substituindo a exigência de que  $f: M^n \rightarrow R^{2n+1}$  seja um homeomorfismo pela condição mais débil de que  $f$  seja apenas biunívoca.

Para demonstrações do Teorema 1, o leitor pode consultar [25], pag. 112, [15], pag. 21. O caso compacto pode ser visto em [19], pag. 16, e em [13], pag. 184.

Observaremos aqui que o método de demonstração de Whitney [25], exposto também por Milnor [15] permite, na realidade concluir um resultado mais forte, segundo o qual, dada uma variedade compacta  $M^m$  e uma variedade qualquer  $N^{2m+1}$ , toda função contínua  $f: M^m \rightarrow N^{2m+1}$  pode ser uniformemente aproximada por uma imersão  $g: M^m \rightarrow N^{2m+1}$ . O mesmo resultado vale sem a hipótese de compacidade de  $M$ , desde que o conceito de imersão seja tomado no sentido fraco acima mencionado.

Uma *métrica riemanniana* numa variedade diferenciável  $M^m$  consiste num produto interno em cada espaço tangente  $M_p$ . Indicando com  $u \cdot v$  o produto interno de dois vetores  $u, v \in M_p$ , exigiremos que este produto varie “diferenciavelmente” com o ponto  $p$ . Isto significa que, tomando um sistema de coordenadas locais  $x: U \rightarrow R^n$  em  $M$ , o produto interno  $g_{ij}(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}(p)$  de dois vetores básicos de  $M_p$  deve ser uma função diferenciável  $g_{ij}: U \rightarrow R$ .

Um corolário do Teorema de Whitney é que toda variedade diferenciável  $M^n$  pode ser munida de uma métrica riemanniana. Com efeito, basta tomar uma imersão  $f: M^n \rightarrow R^{2n+1}$  e definir o produto interno de dois vetores  $u, v \in M_p$  como  $u \cdot v = f_*(u) \cdot f_*(v)$ , onde o produto interno do 2º membro é aquele do espaço euclidiano  $R^{2n+1}$ .

A importância do conceito de valor regular é, em grande parte, devida ao teorema seguinte, cuja demonstração é simples. No caso em que  $M$  e  $N$  são abertos do espaço euclidiano, veja-se [13], pag. 55. A demonstração do caso geral é a mesma.

**Teorema 2.** *Seja  $f: M^m \rightarrow N^n$  uma aplicação diferenciável, e  $q \in N$  um valor regular de  $f$ , com  $f^{-1}(q) \neq \emptyset$ . Então  $f^{-1}(q)$  é uma subvariedade de dimensão  $m - n$  em  $M^m$ .*

Podemos ainda acrescentar que, se  $M$  e  $N$  forem orientadas,  $S = f^{-1}(q)$  possui uma orientação natural.

O teorema mais profundo a respeito de valores regulares é o que afirma que eles existem, e em grande quantidade, qualquer que seja a aplicação diferenciável dada. Antes de enunciá-lo, daremos uma definição: diremos que um subconjunto  $X \subset M^n$ , numa variedade diferenciável, tem *medida nula* quando, para todo sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$ , em  $M$ , o conjunto  $x(U \cap X)$  tiver medida nula em  $R^n$ . Para isto, basta que exista uma cobertura de  $X$  por abertos  $U$ , que são domínios de sistemas de coordenadas, com  $m(x(U \cap X)) = 0$  em  $R^n$ . O complementar de um conjunto de medida nula é, evidentemente, denso em  $M$ . Uma reunião enumerável de conjuntos de medida nula tem também medida nula.

**Teorema 3** (Sard). *Seja  $f: M^m \rightarrow N^n$  uma aplicação diferenciável. O conjunto dos pontos de  $N$  que não são valores regulares de  $f$  tem medida nula em  $N$ .*

Para demonstrações deste importante teorema, vejamos [11] e [19], pag. 19. Em [19], o Teorema de Sard é apresentado numa versão ligeiramente mais fraca, em termos da “categoria” de Baire. Em [11] encontram-se aplicações interessantes do referido teorema. No caso de ser  $\dim M = \dim N$ , a demonstração do Teorema de Sard torna-se bem mais simples. (Vejam-se [18] e [20], Chap. I). Exceto em dois casos, utilizaremos aqui somente esta versão mais elementar. É imediato que o Teorema de Sard para variedades com bordo segue-se diretamente do caso sem bordo.

A hipótese de que toda variedade diferenciável  $M^n$  deve ter base enumerável equivale a admitir que ela é *paracompacta*, isto é, que toda cobertura aberta de  $M$  pode ser refinada por uma cobertura localmente finita. (Vide [2]). Utilizaremos a paracompacidade de  $M^n$  sob o seguinte aspecto:

**Lema 1.** *Dada uma variedade diferenciável  $M^n$ , toda cobertura aberta de  $M$  pode ser refinada por uma cobertura enumerável  $\{U_\alpha\}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$ , localmente finita, tal que existem sistemas de coordenadas  $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow R^n$ , com  $x_\alpha(U_\alpha) = B(3) =$  bola aberta de raio 3 em  $R^n$ , e, além disso, se pusermos  $V_\alpha = x_\alpha^{-1}B(2)$  e  $W_\alpha = x_\alpha^{-1}(B(1))$ , os  $W_\alpha$  ainda cobrirão  $M$ .*

Isto resulta diretamente da paracompacidade. É um fato de Topologia Geral, pura e simplesmente. Usamos agora a existência de uma função diferenciável  $\varphi: B(3) \rightarrow R$  tal que  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi(B(1)) = 1$ ,  $\varphi(B(3) - B(2)) = 0$

(Vide [13], pag. 164; [25], pag. 372). Definimos, para cada  $\alpha = 1, 2, \dots$ , uma função real diferenciável  $\psi_\alpha: M \rightarrow R$ , pondo  $\psi_\alpha(p) = \varphi(x_\alpha(p))$  se  $p \in U_\alpha$ , e  $\psi_\alpha(p) = 0$  se  $p \notin U_\alpha$ . Em seguida, definimos novas funções  $\varphi_\alpha: M \rightarrow R$  pondo, para todo  $p \in M$ :

$$\varphi_\alpha(p) = \frac{\psi_\alpha(p)}{\sum_\alpha \psi_\alpha(p)}.$$

A coleção  $\{\varphi_\alpha; \alpha = 1, 2, \dots\}$  de funções reais diferenciáveis é tal que  $0 \leq \varphi_\alpha(p) \leq 1$  para todo  $\alpha$  e todo  $p \in M$ ,  $\sum_\alpha \varphi_\alpha(p) = 1$  para todo  $p \in M$  e, além disso,  $\varphi_\alpha(p) = 0$  se  $p \notin V_\alpha$ . As funções  $\{\varphi_\alpha\}$  formam o que se denomina uma *partição da unidade* subordinada à cobertura  $\{V_\alpha\}$ . “Subordinada” a esta cobertura significa que cada  $\varphi_\alpha$  anula-se fora de  $V_\alpha$ . É claro que  $\{\varphi_\alpha\}$  também é subordinada a  $\{U_\alpha\}$  e, mais geralmente a qualquer cobertura  $\{Z_\alpha\}$  tal que  $V_\alpha \subset Z_\alpha$  para todo  $\alpha$ .

Um lema que será grandemente utilizado no texto é o seguinte:

**Lema 2.** *Seja  $M^n$  uma variedade conexa. Dados dois pontos quaisquer  $p, q \in M$ , existe um sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$  em  $M$ , com  $p, q \in U$  e com  $x(U) = R^n$ .*

Não sabemos dar uma referência para a demonstração deste lema, embora ele seja bastante útil e conhecido. Um esboço de demonstração é o seguinte: sendo  $M$  conexa, existe uma curva  $L \subset M$  (= imersão da reta em  $M$ ) que contém  $p$  e  $q$ . Consideremos uma vizinhança tubular  $T$  de  $L$  em  $M$ . (No caso de subvariedades do  $R^n$ , vizinhanças tubulares são estudadas em [13], pags. 77 e 82. O caso

geral é análogo. Vide [19] pag. 82). A vizinhança tubular é um espaço fibrado  $\pi: T \rightarrow L$  sobre  $L$ . Mas sabe-se que todo espaço fibrado sobre a reta é trivial (Vide [22], pag. 53). Logo  $T$  é difeomorfa ao produto  $L \times B^{n-1}$ , onde  $B^{n-1}$  (a fibra) é uma bola aberta de dimensão  $n - 1$ . Sendo  $L$  difeomorfa a  $R$ ,  $L \times B^{n-1}$  é difeomorfa a  $R \times B^{n-1}$  ou, seja a  $R^n$ . O difeomorfismo composto  $x: T \rightarrow R^n$  demonstra o Lema.



# Capítulo II

## Homotopia

### 1 Introdução

Indicaremos com  $I = [0, 1]$  o intervalo fechado  $0 \leq t \leq 1$ .

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Duas aplicações contínuas  $f, g: X \rightarrow Y$  dizem-se *homotópicas* quando existe uma aplicação contínua

$$F: X \times I \rightarrow Y,$$

do produto cartesiano  $X \times I$  em  $Y$ , tal que  $F(x, 0) = f(x)$  e  $F(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$ . Neste caso,  $F$  chama-se uma *homotopia* entre  $f$  e  $g$ . Para indicar que  $f$  é homotópica a  $g$ , escreve-se

$$f \simeq g: X \rightarrow Y \quad \text{ou, simplesmente,} \quad f \simeq g.$$

Usa-se também o símbolo  $F: f \simeq g$  para indicar que  $F$  é uma homotopia entre  $f$  e  $g$ .

Seja  $Y^X$  o conjunto de todas as aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$ . A relação de homotopia é uma relação de

equivalência no conjunto  $Y^X$ , pois são válidas as seguintes propriedades:

- (1) **Reflexividade:**  $f \simeq f$ , para toda  $f \in Y^X$ ;
- (2) **Simetria:** se  $f, g \in Y^X$  e  $f \simeq g$ , então  $g \simeq f$ ;
- (3) **Transitividade:** dadas  $f, g, h \in Y^X$ , se  $f \simeq g$  e  $g \simeq h$ , então  $f \simeq h$ .

As demonstrações dessas propriedades se fazem de modo direto. Dada  $f: X \rightarrow Y$  contínua, a aplicação  $F: X \times I \rightarrow Y$  definida por  $F(x, t) = f(x)$ ,  $x \in X$ ,  $t \in I$ , é uma homotopia entre  $f$  e  $f$ , o que demonstra (1). Para demonstrar (2), seja  $F: X \times I \rightarrow Y$  uma homotopia entre  $f$  e  $g$ . Então, definamos  $G: X \times I \rightarrow Y$  pondo  $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ . É claro que  $G$  é contínua e, para todo  $x \in X$ ,  $G(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$ ,  $G(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$ , donde  $G$  é uma homotopia entre  $g$  e  $f$ . Finalmente, para demonstrar (3), sejam  $F: f \simeq g$  e  $G: g \simeq h$  homotopias. Definiremos uma aplicação  $H: X \times I \rightarrow Y$  pondo  $H(x, t) = F(x, 2t)$  para  $0 \leq t \leq 1/2$  e  $H(x, t) = G(x, 2t - 1)$  para  $1/2 \leq t \leq 1$ . A aplicação  $H$  é bem definida pois, para  $t = 1/2$ , temos  $F(x, 2t) = G(x, 2t - 1) = g(x)$ . Além disso,  $H$  é contínua em cada um dos subconjuntos fechados  $A = \{(x, t) \in X \times I; t \leq 1/2\}$  e  $B = \{(x, t) \in X \times I; t \geq 1/2\}$  de  $X \times I$ . Logo,  $H$  é contínua em  $X \times I = A \cup B$ . E, como  $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$  para todo  $x \in X$ , tem-se  $H: f \simeq h$ , o que conclui a demonstração.

Ilustraremos o conceito de homotopia com dois exemplos simples. Em primeiro lugar, observaremos que, dado um espaço topológico  $X$  arbitrário, duas funções contínuas

quaisquer  $f, g: X \rightarrow R^n$  são sempre homotópicas. Com efeito, basta definir  $F: X \times I \rightarrow R^n$  pondo  $F(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ ,  $x \in X$ ,  $t \in I$ . É claro que  $F$  é contínua e, além disso, para todo  $x \in X$ , temos  $F(x, 0) = f(x)$  e  $F(x, 1) = g(x)$ , donde  $F$  é uma homotopia entre  $f$  e  $g$ . A homotopia  $F$ , vista geometricamente, consiste em deslocar cada ponto  $f(x)$ , ao longo do segmento de reta  $f(x)g(x)$ , em movimento uniforme ( $t =$  tempo) de modo a chegar em  $g(x)$  para  $t = 1$ . Nota-se, então que o mesmo resultado é ainda válido se substituimos  $R^n$  por qualquer subconjunto convexo  $A \subset R^n$ .

Em seguida, mostraremos que, dado um espaço topológico arbitrário  $X$  e a esfera unitária  $n$ -dimensional  $S^n$ , se uma função contínua  $f: X \rightarrow S^n$  é tal que  $f(X) \neq S^n$ , (isto é, se  $f$  não é sobre  $S^n$ ) então  $f$  é homotópica a uma aplicação constante  $X \rightarrow q \in S^n$ . Com efeito, se existe  $p \in S^n$  tal que  $p \notin f(X)$  então  $f$  pode ser considerada como uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow S^n - p$ . Mas, usando a projeção estereográfica, temos o homeomorfismo  $S^n - p = R^n$ . Usando o resultado anterior, concluímos que  $f$  é homotópica a qualquer aplicação contínua  $g: X \rightarrow S^n - p$  e, em particular, a uma aplicação constante. Isto também pode ser visto diretamente, assim: seja  $q \in S^n$  o antípoda do ponto  $p$ . Então, qualquer que seja  $y \in S^n - p$ , o segmento de reta  $\overline{qy}$  não contém a origem  $0 \in S^n$ . Assim, para todo  $x \in X$ , e  $0 \leq t \leq 1$ , o ponto  $tq + (1-t)f(x) \in R^n$  é sempre distinto de zero. Logo, a aplicação  $F: X \times I \rightarrow S^n$ , definida por

$$F(x, t) = \frac{tq + (1-t)f(x)}{|tq + (1-t)f(x)|}$$

é contínua, e é uma homotopia entre  $f: X \rightarrow S^n$  e a aplicação constante  $x \rightarrow q \in S^n$ .

Quando se estudam os chamados “grupos de homotopia”, desempenha um papel fundamental a proposição seguinte, que constitui o exemplo mais simples da conexão existente entre a noção de homotopia e o problema da extensão de funções contínuas.

Indicaremos com  $B^{n+1} = \{x \in R^{n+1}; |x| \leq 1\}$  a *bola unitária* fechada de  $R^{n+1}$ , cuja fronteira é a esfera  $S^n$ .

**Proposição 1.** *Seja  $X$  um espaço topológico qualquer. Uma aplicação contínua  $f: S^n \rightarrow X$  admite uma extensão contínua  $\bar{f}: B^{n+1} \rightarrow X$  se, e somente se,  $f$  é homotópica a uma aplicação constante  $S^n \rightarrow c$ ,  $c \in X$ .*

**Demonstração:** Se  $f$  admite uma extensão contínua  $\bar{f}: B^{n+1} \rightarrow X$ , então a aplicação  $F: S^n \times I \rightarrow X$ , definida por  $F(x, t) = \bar{f}(tx)$  constitui uma homotopia entre  $f$  e a aplicação constante  $S^n \rightarrow c$ ,  $c = \bar{f}(0) \in X$ . Reciprocamente, seja  $F: S^n \times I \rightarrow X$  uma homotopia entre  $f$  e uma aplicação constante  $S^n \rightarrow c$ ,  $c \in X$ . Definindo  $\bar{f}: B^{n+1} \rightarrow X$  com  $\bar{f}(x) = F\left(\frac{x}{|x|}, 1 - |x|\right)$ , se  $0 \neq x \in B^{n+1}$ , e  $\bar{f}(0) = c$ , vemos que  $\bar{f}$  é contínua e estende  $f$ .

Indicaremos com o símbolo  $[f]$  a classe de equivalência de uma aplicação  $f: X \rightarrow Y$  segundo a relação  $\simeq$  de homotopia. A classe  $[f]$  consiste pois de todas as aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$  que são homotópicas a  $f$ , e chama-se a *classe de homotopia* de  $f$ . O espaço quociente de  $Y^X$  pela relação de homotopia, isto é, o conjunto de todas as classes de homotopia  $[f]$  das aplicações contínuas  $f$  de  $X$  em  $Y$ , será indicado com  $[X, Y]$ .

O conjunto  $Y^X$  das aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$  pode ser tornado um espaço topológico, por meio da chamada *topologia compact-open*. (Para detalhes sobre essa topo-

logia, vide [2]). Em todos os casos que consideraremos,  $X$  e  $Y$  serão espaços métricos localmente compactos, e ela coincidirá com a topologia “da convergência uniforme nas partes compactas”. Continuemos usando o mesmo símbolo para indicar o espaço topológico  $Y^X$  com a topologia compact-open. Uma homotopia  $F: X \times I \rightarrow Y$  entre duas aplicações  $f, g: X \rightarrow Y$  pode ser interpretada como um arco

$$\tilde{F}: I \rightarrow Y^X$$

no espaço topológico  $Y^X$ , ligando o ponto  $f$  ao ponto  $g$ . Com efeito, basta por  $\tilde{F}(t) =$  elemento de  $Y^X$  tal que  $\tilde{F}(t)(x) = F(x, t)$ . Vê-se sem muita dificuldade, a partir da maneira como foi definida a topologia em  $Y^X$ , que  $\tilde{F}: I \rightarrow Y^X$  é de fato contínua e que, reciprocamente, todos os arcos em  $Y^X$  provêm, desta maneira, de homotopias. (Mais profundo, é o resultado segundo o qual a correspondência  $F \rightarrow \tilde{F}$  acima descrita é, na realidade, um homeomorfismo entre os espaços  $Y^{(X \times I)}$  e  $(Y^X)^I$ .)

Assim, cada classe de homotopia  $[f]$ , com  $f: X \rightarrow Y$  contínua, é a componente conexa por arcos do ponto  $f$  no espaço topológico  $Y^X$  e o conjunto  $[X, Y]$  é o conjunto das componentes conexas por arcos do espaço  $Y^X$ .

No que se segue, não faremos uso das considerações acima feitas sobre  $Y^X$  como espaço topológico as quais, entretanto, fornecem uma maneira útil e bem intuitiva de visualizar a noção de homotopia.

Um dos problemas mais importantes da Topologia é o da “classificação” das aplicações de um espaço  $X$  num espaço  $Y$  por meio da relação de homotopia. Mais precisamente, esse problema consiste em determinar condições necessárias e suficientes para que duas aplicações contínuas

$f, g: X \rightarrow Y$  sejam homotópicas, e obter informações sobre a estrutura do conjunto  $[X, Y]$ , tais como número de elementos, operações algébricas que se podem definir naturalmente entre as classes de homotopia, etc. Grande parte da Topologia Algébrica que tem sido estudada nestes últimos 25 anos tem sido dedicada a tal problema. Um certo número de casos particulares importantes foram efetivamente elucidados, mas uma solução completa para o problema, mesmo quando  $X$  e  $Y$  são esferas do espaço euclidiano, ainda não foi obtida.

No presente capítulo, estudaremos o problema da classificação de aplicações contínuas  $f: M^n \rightarrow S^n$ , onde  $M^n$  é uma variedade diferenciável compacta e conexa, de dimensão  $n$ , e  $S^n$  é a esfera unitária  $n$ -dimensional. Trata-se de um caso particular do problema da classificação, para o qual um resultado simples e completo foi obtido. Há dois casos distintos a considerar:

(a)  $M^n$  é **orientável**. Orientaremos  $M^n$  e mostraremos que, a cada aplicação contínua  $f: M^n \rightarrow S^n$ , é possível associar um inteiro  $k \in \mathbb{Z}$ , chamado o *grau* de  $f$  tal que duas aplicações  $f, g: M^n \rightarrow S^n$  têm o mesmo grau se, e somente se, são homotópicas, e que todo número inteiro  $k$  pode ser obtido como o grau de alguma aplicação contínua  $f: M^n \rightarrow S^n$ . Assim fazendo, estabeleceremos uma correspondência biunívoca

$$[M^n, S^n] \approx \mathbb{Z}.$$

Em particular, o conjunto  $[M^n, S^n]$  é infinito, enumerável, e possui, de modo natural, uma estrutura de grupo cíclico.

(b)  $M^n$  **não é orientável**. Nese caso, não é possível definir o grau como um número inteiro, mas definiremos

uma espécie de “grau módulo 2”: dividiremos as aplicações contínuas  $f: M^n \rightarrow S^n$  em duas classes, uma formada pelas chamadas aplicações “pares” e outra das aplicações que chamaremos “ímpares”. Mostraremos que duas aplicações contínuas  $f, g: M^n \rightarrow S^n$  são homotópicas se, e somente se, são ambas pares, ou ambas ímpares. Seja  $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$  o grupo de dois elementos. Associando a cada aplicação  $f: M^n \rightarrow S^n$  o elemento  $\bar{0}$  ou o elemento  $\bar{1}$  conforme  $f$  seja “par” ou “ímpar”, estabeleceremos uma correspondência biunívoca

$$[M^n, S^n] \approx \mathbb{Z}_2,$$

pois é fácil ver que existem aplicações pares e aplicações ímpares.

O conceito de *grau* é devido a L. Brouwer, o qual demonstrou que duas aplicações homotópicas têm o mesmo grau. O fato de que duas aplicações  $f, g: M^n \rightarrow S^n$ , com o mesmo grau, são homotópicas, foi demonstrado por H. Hopf, que caracterizou, mais geralmente, o conjunto  $[K^n, S^n]$ , onde  $K^n$  é um poliedro  $n$ -dimensional qualquer.

Nosso procedimento será o seguinte: em primeiro lugar, reduziremos o problema da homotopia de aplicações contínuas de uma variedade diferenciável noutra a um problema de aplicações diferenciáveis e homotopias diferenciáveis. Mostraremos que toda aplicação contínua  $f: M^m \rightarrow N^n$  é homotópica a uma aplicação diferenciável  $g: M^m \rightarrow N^n$  e que, se existe uma homotopia contínua  $F: M \times I \rightarrow N$  entre duas aplicações diferenciáveis  $f, g: M \rightarrow N$ , existe também uma homotopia diferenciável  $G: M \times I \rightarrow N$ .

Em seguida, definiremos o grau (resp. o “grau módulo 2”) de uma aplicação diferenciável  $f: M^n \rightarrow N^n$ ,  $M^n$  compacta orientada (resp. não orientável). Como duas

aplicações homotópicas terão o mesmo grau, definiremos o grau de uma aplicação contínua simplesmente como o grau de qualquer aplicação diferenciável que lhe seja homotópica. Uma vez classificadas as aplicações diferenciáveis  $f: M^n \rightarrow S^n$ , segundo homotopias diferenciáveis, por meio da noção de grau, o caso geral de funções contínuas segue-se imediatamente das observações acima feitas.

## 2 Homotopias em variedades diferenciáveis

O objetivo desta seção é reduzir o problema da homotopia em variedades diferenciáveis ao caso de aplicações e homotopias diferenciáveis. Notemos que, se  $M^m$  é uma variedade diferenciável (sem bordo), o produto cartesiano  $M^m \times I$  é uma variedade diferenciável com bordo. O bordo de  $M^m \times I$  é igual a  $(M^m \times 0) \cup (M^m \times 1)$ . Uma homotopia diferenciável entre duas aplicações diferenciáveis  $f, g: M^m \rightarrow N^n$  é simplesmente uma aplicação diferenciável  $F: M^m \times I \rightarrow N^n$  tal que  $F(x, 0) = f(x)$  e  $F(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in M$ . Neste caso, diz-se que  $f$  e  $g$  são *diferenciavelmente homotópicas*. É imediato que esta relação é reflexiva e simétrica. Mas não é óbvio que seja transitiva. Demonstramos, então, o resultado seguinte:

**Lema 1.** *Sejam  $f, g, h: M^m \rightarrow N^n$  aplicações diferenciáveis e  $F: f \simeq g$ ,  $G: g \simeq h$  homotopias diferenciáveis. Então existe uma homotopia diferenciável  $H: f \simeq h$ .*

**Demonstração:** Consideremos uma função diferenciável qualquer  $\xi: [0, 1/2] \rightarrow [0, 1]$  com as seguintes propriedades:



- (a)  $\xi(0) = 0, \xi(1/2) = 1$
- (b) Todas as derivadas  $\xi^{(r)}(t)$  se anulam nos pontos  $t = 0$  e  $t = 1/2$ .

Uma tal função  $\xi$  pode ser obtida pondo-se  $\xi(t) = \tau(2t)$ , onde  $\tau$  é a função definida em [13], página 166. A expressão explícita de  $\tau$  é a seguinte:

$$\tau(t) = \frac{1}{b} \int_0^t e^{-1/x(1-x)} dx, \text{ com } b = \int_0^1 e^{-1/x(1-x)} dx.$$

Salientamos porém que uma fórmula explícita que dê a função  $\xi$  não tem maior interesse. Somente as propriedades (a) e (b) acima serão utilizadas. A partir das homotopias  $F, G$ , e da função  $\xi$ , definiremos uma homotopia  $H: M \times I \rightarrow N$  pondo, para  $x \in M$  e  $t \in I$ ,

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, \xi(t)) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2; \\ G(x, \xi(t - 1/2)) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Como  $F(x, \xi(1/2)) = G(x, \xi(0)) = g(x)$ ,  $H$  é bem definida e contínua. Além disso,  $H(x, 0) = F(x, \xi(0)) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = G(x, \xi(1/2)) = G(x, 1) = h(x)$ , para todo  $x \in M$ . Portanto,  $H$  é uma homotopia entre  $f$  e  $h$ . Resta mostrar que  $H$  é diferenciável. Isto é claro, exceto nos pontos da forma  $(x, 1/2)$ . E, mesmo nesses pontos, não há dúvidas quanto à existência das derivadas parciais de  $H$  relativamente às coordenadas de  $x$ . Devemos examinar a existência das derivadas parciais  $\frac{\partial^r H}{\partial t^r}(x, 1/2)$ . Vejamos a primeira derivada. Calculando as derivadas laterais no ponto  $t = 1/2$ , obtém-se facilmente

$$\frac{\partial H^+}{\partial t}(x, 1/2) = \xi'(0) \cdot \frac{\partial G}{\partial t}(x, 0) = 0, \text{ pois } \xi'(0) = 0;$$

$$\frac{\partial H^-}{\partial t}(x, 1/2) = \xi' \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\partial F}{\partial t}(x, 1) = 0, \quad \text{pois } \xi' \left( \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Assim existem e são iguais as derivadas laterais de  $H$  em  $(x, 1/2)$ . Segue-se que  $H$  é de classe  $C^1$ . Repetindo sucessivamente o mesmo argumento, verifica-se que todas as derivadas parciais laterais de  $H$  relativamente a  $t$  se anulam para  $t = 1/2$ , donde  $H \in C^\infty$ , como queríamos demonstrar.

Passemos, em seguida, ao teorema principal da seção.

**Teorema 1.** Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis compactas. Então:

- (a) *Toda aplicação contínua  $f: M^m \rightarrow N^n$  é homotópica a uma aplicação diferenciável  $g: M^m \rightarrow N^n$ :*
- (b) *Se duas aplicações diferenciáveis  $f, g: M^m \rightarrow N^n$  são homotópicas, elas são diferenciavelmente homotópicas.*

**Demonstração:** O Teorema 1 segue-se imediatamente dos lemas que demonstraremos a seguir.

**Lema 2.** *Seja  $M^m$  uma variedade diferenciável compacta e  $N^n \subset R^k$  uma superfície regular compacta do espaço euclidiano  $R^k$ . Dada uma aplicação contínua e um número  $\varepsilon > 0$ , existe uma aplicação diferenciável  $g: M \rightarrow N$  tal que  $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in M$ .*

**Demonstração:** Seja  $T = T_\delta(N)$  uma vizinhança tubular de  $N$ , de amplitude  $2\delta$ , com  $\delta < \varepsilon/2$ . Todo ponto  $z \in R^k$ , que dista menos de  $\delta$  de algum ponto  $x \in N$ , pertence a  $T$ . Com efeito, o ponto  $x_0 \in N$  que menos dista de  $z$  é o pé de um segmento normal  $\overline{zx_0}$ . Como  $|z - x_0| < \delta$ ,

tem-se  $z \in T$ . Em seguida, sendo  $f$  contínua e  $M$  compacta, existe uma cobertura aberta finita  $\{V_1, \dots, V_r\}$  de  $M$ , tal que  $|f(x) - f(y)| < \delta$  sempre que  $x, y$  pertencem ao mesmo  $V_i$ . Seja  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$  uma partição diferenciável da unidade subordinada à cobertura  $\{V_i\}$ . Escolhamos, em cada conjunto  $V_i$ , um ponto  $x_i$  e definamos uma aplicação diferenciável  $h: M \rightarrow R^k$ , pondo, para cada  $x \in M$ ,

$$h(x) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(x) f(x_i).$$

Para determinar o grau de aproximação entre  $h$  e  $f$ , notemos que, para cada  $x \in M$ ,

$$\begin{aligned} h(x) - f(x) &= \sum_i \varphi_i(x) f(x_i) - \sum_i \varphi_i(x) f(x) \\ &= \sum_i \varphi_i(x) [f(x_i) - f(x)], \end{aligned}$$

pois  $\sum \varphi_i(x) = 1$ . Examinemos cada parcela do último somatório. Se  $x \notin V_i$ , temos  $\varphi_i(x) = 0$ , donde a parcela se anula. Se, por outro lado,  $x \in V_i$ , então  $|f(x_i) - f(x)| < \delta$ . Assim, podemos escrever, para todo  $x \in M$ :

$$|h(x) - f(x)| < \sum_i \varphi_i(x) \delta = \delta.$$

Segue-se que  $h(x) \in T$  para cada  $x \in M$ . Seja  $\pi: T \rightarrow N$  a projeção associada à vizinhança tubular  $T$ . Ponhamos  $g(x) = \pi(h(x))$ , definindo assim uma aplicação diferenciável  $g: M \rightarrow N$ . Para cada  $x \in M$ , temos

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)| < \delta + \delta < \varepsilon,$$

pois  $g(x) = \pi(h(x))$ , sendo o pé da normal de  $h(x)$  a  $N$  em  $T_\delta(N)$ , não pode distar mais de  $\delta$  de  $h(x)$ .

**Lema 3.** *Seja  $N^n \subset R^k$  uma superfície regular compacta. Existe um número  $\varepsilon > 0$  com a seguinte propriedade: dado um espaço topológico  $X$  qualquer e duas aplicações contínuas  $f, g: X \rightarrow N$  tais que  $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in X$ , então  $f$  e  $g$  são homotópicas.*

**Demonstração:** Seja  $T = T_\delta(N)$  uma vizinhança tubular de  $N$  em  $R^k$ . Seja  $\varepsilon > 0$  um número tal que se  $p, q \in N$  e  $|q - p| < \varepsilon$  então o segmento  $\overline{pq}$  está todo contido em  $T$ . (Basta tomar  $\varepsilon < \text{número de Lebesgue de uma cobertura de } N \text{ por bolas abertas contidas em } T$ ). Então, se  $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in X$ , o segmento de reta  $\overline{f(x)g(x)} = \{(1-t)f(x) + tg(x); 0 \leq t \leq 1\}$  está contido em  $T$  e portanto tem sentido definir uma aplicação  $F: X \times I \rightarrow N$  pondo:

$$F(x, t) = \pi[(1-t)f(x) + tg(x)],$$

onde  $\pi: T \rightarrow N$  é a projeção canônica da vizinhança tubular. É claro que  $F$  é contínua e, além disso  $F(x, 0) = \pi(f(x)) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = \pi(g(x)) = g(x)$ , donde  $F$  é uma homotopia entre  $f$  e  $g$ .

**Observação:** Se  $X$  for uma variedade diferenciável e  $f, g$  forem aplicações diferenciáveis, então a homotopia  $F$  é também diferenciável, como se vê pela expressão que a define.

Mostremos agora como o Teorema 1 se deduz dos Lemas acima.

Primeiro a parte (a). Dada  $f: M \rightarrow N$  contínua, consideramos uma imersão  $N \subset R^k$ . Pelo Lema 3, existe  $\varepsilon > 0$  tal que toda aplicação  $g: M \rightarrow N$  que diste menos de  $\varepsilon$  de  $f$  é homotópica a  $f$ . Com este  $\varepsilon$ , usamos o Lema 2 e obtemos uma aplicação diferenciável  $g: M \rightarrow N$  que dista menos de  $\varepsilon$  de  $f$  e portanto é homotópica a  $f$ .

Em seguida, a parte (b). Dadas  $f, g: M \rightarrow N$  diferenciáveis, e uma homotopia (contínua)  $F: M \times I \rightarrow N$  entre  $f$  e  $g$ , consideramos uma imersão  $N \subset R^k$  e o número  $\varepsilon$  dado pelo Lema 3. Depois, usando o Lema 2, obtemos uma homotopia diferenciável  $G: M \times I \rightarrow N$  tal que

$$|F(x, t) - G(x, t)| < \varepsilon \quad (*)$$

para todo  $x \in M$  e  $t \in I$ .  $G$  é uma homotopia entre as aplicações diferenciáveis  $\bar{f}(x) = G(x, 0)$  e  $\bar{g}(x) = G(x, 1)$  de  $M$  em  $N$ . Em virtude da desigualdade (\*), tem-se  $|f(x) - \bar{f}(x)| < \varepsilon$  e  $|g(x) - \bar{g}(x)| < \varepsilon$  para todo  $x \in M$ . Segue-se (vide Observação seguinte ao Lema 3) que  $f \simeq \bar{f}$  e  $g \simeq \bar{g}$  diferenciavelmente. Como  $G: \bar{f} \simeq \bar{g}$  também diferenciavelmente, o Lema 1 implica que  $f \simeq g$  diferenciavelmente, o que encerra a demonstração do Teorema 1.

**Observação:** O Teorema 1 é válido sem a hipótese restritiva de que  $M$  e  $N$  são compactas. Preferimos enunciá-lo como o fizemos porque a demonstração é mais simples e não usaremos aqui senão o presente caso.

### 3 O conceito de grau

Recapitularemos, inicialmente, a noção de “aplicação própria”. Para demonstrações destes fatos de Topologia Geral,

veja-se [2], pág. 102 (Cap. I).

Sejam  $X, Y$  espaços localmente compactos. Uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow Y$  diz-se *própria* quando a imagem inversa  $f^{-1}(K)$  de todo compacto  $K \subset Y$  é um compacto em  $X$ .

Indiquemos com  $\dot{X} = X \cup \{\alpha\}$  e  $\dot{Y} = Y \cup \{\beta\}$  as compactificações de Alexandroff dos espaços  $X$  e  $Y$  respectivamente. Uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow Y$  é própria se, e somente se, a aplicação  $\dot{f}: \dot{X} \rightarrow \dot{Y}$  definida por  $\dot{f}(\alpha) = \beta$  e  $\dot{f}(x) = f(x)$  para  $x \in X$  for também uma aplicação contínua. Em particular, se  $X$  e  $Y$  são metrizáveis (único caso que consideraremos) uma condição necessária e suficiente para que  $f: X \rightarrow Y$  seja própria é a seguinte: dada uma seqüência  $(x_n)$  em  $X$  que não possui subsequências convergentes (isto é: uma seqüência “divergente” em  $X$ ), então a seqüência  $(f(x_n))$  é também divergente em  $Y$ . Em linguagem intuitiva: se  $x_n \rightarrow \infty$  em  $X$ , então  $f(x_n) \rightarrow \infty$  em  $Y$ .

Por exemplo, se  $X$  é compacto, toda aplicação contínua  $f: X \rightarrow Y$  é própria. Por outro lado, se  $Y$  é compacto e  $f: X \rightarrow Y$  é própria, então  $X$  é necessariamente compacto, pois  $X = f^{-1}(Y)$ .

As aplicações próprias gozam de muitas propriedades das aplicações contínuas quaisquer definidas num espaço compacto. Por exemplo, se  $f: X \rightarrow Y$  é própria e  $F \subset X$  é fechado, então  $f(F)$  é fechado em  $Y$ . Isto resulta imediatamente da caracterização das aplicações próprias em termos da compactificação de Alexandroff. Em particular, uma aplicação própria biunívoca  $f: X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo de  $X$  sobre  $f(X)$ .

Finalmente, observaremos que se  $f: X \rightarrow Y$  é própria, se  $B \subset Y$  é um subconjunto aberto e  $A = f^{-1}(B)$ , então a aplicação  $f': A \rightarrow B$ , definida por  $f'(x) = f(x)$ ,  $x \in A$ , é também própria. (Note-se que  $A, B$  são localmente compactos, por serem subconjuntos abertos de um espaço localmente compacto). A demonstração é imediata.

Sejam  $M^n, N^n$  variedades diferenciáveis orientadas, da mesma dimensão  $n$ , e  $f: M^n \rightarrow N^n$  uma aplicação diferenciável própria. Devemos definir o *grau* de  $f$ . Primeiramente definiremos o grau de  $f$  relativamente a um valor regular  $p \in N$ . Depois mostraremos que, quando  $N$  é conexa, esse grau não depende do valor regular  $p$  escolhido.

De acordo com o Teorema de Sard, o conjunto dos valores regulares  $p \in N$  da aplicação  $f$  é denso em  $N$ . Além disso, sendo  $f$  própria, esse conjunto é aberto em  $N$ . Com efeito, os pontos  $x \in M$  onde a aplicação linear tangente  $f_x: M_x \rightarrow N_{f(x)}$  não é sobre  $N_{f(x)}$  formam um conjunto fechado  $F \subset M$ , pois são definidos pela condição de anular-se neles o determinante jacobiano de  $f_x$ . Assim,  $f(F)$  é fechado em  $N$ . Ora, o conjunto dos valores regulares de  $f$  é precisamente  $N - f(F)$ .

Seja, pois,  $p \in N$  um valor regular de  $f$ . A imagem inversa  $f^{-1}(p)$  é uma subvariedade compacta de dimensão 0 de  $M$ , donde consiste em um número finito de pontos:

$$f^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_r\} \subset M.$$

Em cada ponto  $p_i \in f^{-1}(p)$ , a aplicação linear tangente  $f_{p_i}: M_{p_i} \rightarrow N_p$  é um isomorfismo entre os espaços vetoriais orientados em questão. Diremos que o ponto  $p_i$  é *positivo* ( $p_i > 0$ ) ou *negativo* ( $p_i < 0$ ) conforme o isomorfismo  $f_{p_i}$  conserve as orientações ou as inverta, respectivamente.

Definiremos então o *grau* de  $f$  no valor regular  $p$  como o “número algébrico” de pontos em  $f^{-1}(p)$ , isto é, o número de pontos positivos menos o número de pontos negativos em  $f^{-1}(p)$ . Usaremos a notação  $gr_p(f)$  para indicar esse número.

**Exemplos:** 1) Seja  $f: M^n \rightarrow M^n$  a aplicação identidade. Todo ponto  $p \in M^n$  é um valor regular de  $f$  e  $gr_p(f) = 1$ . Agora consideremos uma variedade  $N^n$  que é igual a  $M^n$ , mas com a orientação *oposta*. A aplicação identidade  $g: M^n \rightarrow N^n$  é tal que todo ponto  $p \in N$  é um valor regular mas o ponto  $p = f^{-1}(p)$  é negativo. Assim, para todo  $p \in N$ ,  $gr_p(g) = -1$ .

2) Seja  $S^1 = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 = 1\}$  o círculo unitário do plano. Para cada inteiro  $n \in \mathbb{Z}$ , consideremos a aplicação  $f_n: S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $f_n(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos(n\theta), \sin(n\theta))$ . Pensando cada ponto  $z = (x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$  em  $S^1$  como o número complexo, de módulo 1,  $z = x + iy = \cos \theta + i \sin \theta$ , tem-se  $f_n(z) = z^n$ . Consideremos primeiro  $n \neq 0$ . Cada ponto  $p \in S^1$  é um valor regular de  $f_n$  pois, em termos de cada sistema de coordenadas locais  $\theta$ ,  $f_n$  assume a forma  $\theta \rightarrow n\theta$ . Para cada  $p \in S^1$ ,  $f^{-1}(p)$  contém exatamente  $|n|$  pontos, todos positivos se  $n > 0$ , todos negativos se  $n < 0$ . Assim,  $gr_p(f_n) = n$  para todo  $p \in S^1$ . Quando  $n = 0$ ,  $f_0$  é uma constante. Os valores regulares são os pontos  $p \neq (0, 1)$  e  $gr_p(f_0) = 0$  para todos esses valores  $p$ .

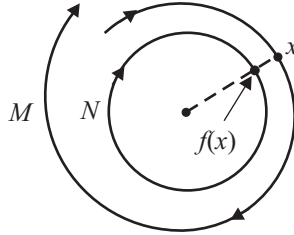
3) Seja  $S^n = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in R^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1\}$  a esfera unitária  $n$ -dimensional. Definamos uma aplicação diferenciável



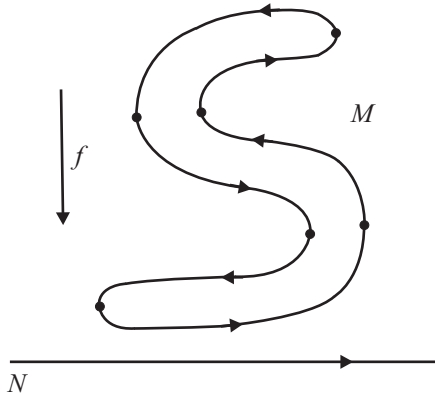
$f: S^n \rightarrow S^n$  pondo  $f(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = (x^1, \dots, x^n, -x^{n+1})$ . Em outras palavras:  $f$  é a reflexão relativamente ao hiperplano  $x^{n+1} = 0$ . Consideremos o ponto  $p = (0, \dots, 0, -1)$  em  $S^n$ . Temos  $f^{-1}(p) = p_1 = (0, \dots, 0, 1)$ . Os espaços vetoriais tangentes  $(S^n)_p$ ,  $(S^n)_{p_1}$  e  $S^n$  nos pontos  $p$  e  $p_1$  são “paralelos”: como subespaços do  $R^{n+1}$  tais que  $v = (\alpha^1, \dots, \alpha^n, 0)$ . No que diz respeito à orientação, diremos que uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de um espaço tangente  $(S^n)_q$  é positiva se, completando-a com o vetor normal  $v = q - 0$  que aponta para o exterior de  $S^n$ , obtivermos uma base positiva  $\{e_1, \dots, e_n, v\}$  de  $R^{n+1}$ . Assim, por exemplo, se  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1, 0)$ , a base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é positiva para o espaço tangente  $(S^n)_{p_1}$ , pois  $v = p_1 - 0 = (0, \dots, 0, 1)$  determina a base positiva  $\{e_1, \dots, e_n, v\}$  em  $R^{n+1}$ . Por outro lado, no ponto  $p = (0, \dots, 0, -1) = f(p_1)$ , a mesma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , agora considerada como base de  $(S^n)_p$ , é negativa, pois  $w = p - 0 = (0, \dots, 0, -1)$  determina a base negativa  $\{e_1, \dots, e_n, w\}$  para  $R^{n+1}$ . Ora, é fácil ver que, indicando com  $f_*$  a transformação linear  $f_{p_1}: (S^n)_{p_1} \rightarrow (S^n)_p$  induzida por  $f$ , tem-se  $f_*(e_1) = e_1, \dots, f_*(e_n) = e_n$ . Assim  $f_*$  inverte as orientações e, por conseguinte, o ponto  $p_1$  é negativo. Podemos então afirmar que  $gr_p(f) = -1$ .

4) Consideremos as variedades  $M, N$ , de dimensão 1, conforme indica a figura seguinte, orientadas segundo as setas mostram, e a aplicação  $f: M \rightarrow N$  que consiste de uma projeção central definida pelo centro do círculo  $N$ . Cada ponto  $x \in M$  é positivo relativamente a  $f$ ; todos os pontos  $p \in N$  são valores regulares de  $f$ . Mas, escolhendo convenientemente o valor  $p \in N$  podemos ter  $gr_p(f) = 1$  ou  $gr_p(f) = 2$ . Isto contraria apenas aparentemente o teorema

principal deste parágrafo, segundo o qual, para  $N$  conexa,  $gr_p(f)$  não depende do valor regular  $p$ . Razão: a aplicação  $f$  deste exemplo *não é própria* (nem poderia ser, pois  $N$  é compacta e  $N$  não é).



5) Sejam  $N$  a reta e  $M$  a variedade compacta de dimensão 1 imersa no plano segundo mostra a figura abaixo.



As orientações de  $M$  e  $N$  acham-se assinaladas na figura por meio das setas. A aplicação  $f: M \rightarrow N$  é a projeção perpendicular a  $N$ . Existem 6 pontos de  $N$  que não são valores regulares de  $f$  (a saber: as imagens por  $f$  dos pontos de  $M$  onde a tangente a  $M$  é perpendicular a  $N$ ). Para

cada valor regular  $p \in N$ , constata-se imediatamente que  $gr_p(f) = 0$ . Observa-se porém que o número de pontos na imagem inversa  $f^{-1}(p)$  de um valor regular  $p$  pode ser 0, 2, 4 ou 6. Quando um ponto móvel  $q$  percorre  $N$ , o número de pontos em  $f^{-1}(q)$  sofre uma alteração somente quando  $q$  atinge um valor não-regular de  $f$ .

**Teorema 2.** *Sejam  $M^n, N^n$  variedades orientadas, de mesma dimensão, sendo  $N$  conexa, e  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável própria. Então o grau  $gr_p(f)$  é o mesmo, qualquer que seja o valor regular  $p \in N$ .*

**Demonstração:** O Teorema 2 baseia-se em 2 lemas, que enunciaremos a seguir.

**Lema 4.** *Nas condições do Teorema 2, todo valor regular  $p \in V$  possui uma vizinhança  $V$ , formada apenas por valores regulares, tal que  $gr_q(f) = gr_p(f)$  para todo  $q \in V$ .*

**Demonstração:** Seja  $f^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_r\}$ . Em cada ponto  $p_i$ , a aplicação linear  $f_*$ , induzida por  $f$ , é biunívoca. Pelo Teorema da função inversa, existem vizinhanças  $W_i \ni p_i$ , as quais podemos tomar conexas e duas a duas disjuntas, tais que cada restrição  $f_i = f|_{W_i}$  é um difeomorfismo de  $W_i$  sobre a vizinhança  $f(W_i)$  do ponto  $p$ . Segue-se então que, para um  $i$  fixo ( $1 \leq i \leq r$ ), todos os pontos de  $W_i$  têm o mesmo “sinal” relativamente a  $f$ . Basta portanto mostrar que existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  tal que, para todo  $q \in V$ ,  $f^{-1}(q)$  consta precisamente de  $r$  pontos  $q_1, \dots, q_r$ , com  $q_i \in W_i$ , isto é,  $q_i = f^{-1}(q) \cap W_i$ . Ora, se tomarmos a vizinhança  $V$  contida em  $f(W_i) \cap \dots \cap f(W_r)$ , veremos que, para todo  $q \in V$  e todo  $W_i$ ,  $f^{-1}(q) \cap W_i$  é não vazio. Como  $f$  é biunívoca em  $W_i$ ,  $f^{-1}(q) \cap W_i$  constará

de um único ponto  $q_i$ . Mas  $f^{-1}(q)$  poderia conter outros pontos, fora de  $W = W_1 \cap \dots \cap W_r$ . Devemos então mostrar que existe  $V \ni p$  com  $f^{-1}(V) \subset W = W_1 \cup \dots \cup W_r$ . Ora, se tal  $V$  não existisse, obteríamos uma seqüência de pontos  $y_n = f(x_n)$  em  $N$ , com  $y_n \rightarrow p$  e  $x_n \in M - W$ . Seja  $U$  uma vizinhança de  $p$ , cujo fecho  $\bar{U}$  é compacto. Como  $y_n \rightarrow p$ , podemos supor que  $y_n \in U$  para todo  $n$ . Assim, cada  $x_n \in F^{-1}(\bar{U})$ . A aplicação  $f$  sendo própria,  $f^{-1}(\bar{U})$  é compacto. Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos então admitir que  $x_n \rightarrow x \in M$ . Temos  $f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim y_n = p$ . Então  $x = p_i$  para algum  $i$ , donde  $x \in W$ . Como  $W$  é aberto e  $x_n \rightarrow x$ , segue-se que  $x_n \in W$  para todo  $n$  suficientemente grande. Isto contradiz a construção, segundo a qual tomamos  $x_n \in M - W$  para todo  $n$ . Assim, a vizinhança  $V$  com  $f^{-1}(V) \subset W$  de fato existe, e o Lema 4 está demonstrado.

**Escólio.** A demonstração do Lema 4 contém, na realidade, o seguinte resultado: *Se  $p \in N$  é um valor regular da aplicação diferenciável  $f: M^n \rightarrow N^n$ , então existe uma vizinhança conexa  $V \ni p$  tal que  $f^{-1}(V) = V_1 \cup \dots \cup V_r$  (reunião disjunta) onde  $f$  aplica cada  $V_i$  difeomorficamente sobre  $V$ .*

**Lema 5.** *Seja  $M^n$  uma variedade orientada. Se  $f: M^n \rightarrow R^n$  é uma aplicação diferenciável própria, com valores no espaço euclidiano  $R^n$ , então  $gr_p(f) = gr_q(f)$  quaisquer que sejam os valores regulares  $p, q \in R^n$ .*

Não demonstraremos o Lema 5. Ele decorrerá dos resultados do Capítulo III (vide Corolário 2 do Teorema 5 daquele capítulo). Por outro lado, uma demonstração di-

reta e bastante clara do Lema 5 pode ser encontrada em [11].

Mostremos agora como se deduz o Teorema 2 do Lema 5. Dada a aplicação  $f: M^n \rightarrow N^n$  e considerados os valores regulares  $p, q \in N$ , sendo  $N$  conexa, existem pontos  $a_0 = p, a_1, \dots, a_s = q$  tais que, para cada  $i = 1, \dots, s$ ,  $a_{i-1}$  e  $a_i$  pertencem a uma mesma vizinhança coordenada  $V_i$ , difeomorfa ao  $R^n$ . Além disso, deslocando ligeiramente  $a_{i-1}$  e  $a_i$ , se necessário for, sem sair de  $V_i$ , podemos supor que todos os  $a_i$  são valores regulares de  $f$ , em virtude do Teorema de Sard. Pelo Lema 5, obtemos  $gr_{a_{i-1}}(f) = gr_{a_i}(f)$  para cada  $i$ , donde  $gr_p(f) = gr_q(f)$ , como queríamos demonstrar.

Dadas as variedades orientadas  $M^n, N^n$ , sendo  $N$  conexa, e uma aplicação diferenciável própria  $f: M \rightarrow N$ , chamaremos de *grau de  $f$*  ao número  $gr(f)$ , igual a  $gr_p(f)$  para qualquer valor regular  $p \in N$  da aplicação  $f$ . Em virtude do Teorema 2, o grau é bem definido. De agora por diante, quando nos referirmos ao grau de uma aplicação, suporemos implicitamente que  $f$  é própria e seu contradomínio é conexo, mesmo quando isto não seja expressamente.

**Teorema 3.** *Dadas  $f: M^n \rightarrow N^n$  e  $g: N^n \rightarrow P^n$ ,  $gr(g \circ f) = gr(f) \cdot gr(g)$ .*

**Demonstração:** Pelo Teorema de Sard, existe um ponto  $p \in P$  que é um valor regular de  $g$  e de  $g \circ f$  simultaneamente. Segue-se imediatamente que, se  $g^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_r\}$ , todos os pontos  $p_i$  são valores regulares de  $f$ . Para cada  $p_i \in g^{-1}(p)$ , poremos  $f^{-1}(p_i) = \{p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{is_i}\}$ . Então  $(g \circ f)^{-1}(p) = \{p_{ij}; i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s_i\}$ . Vemos que o sinal de  $p_{ij}$  relativamente a  $g \cdot f$  é o produto do

sinal de  $p_{ij}$  relativamente a  $f$  pelo sinal de  $p_i = f(p_{ij})$  relativamente a  $g$ . Seja  $\varepsilon_i$  o “sinal” de  $p_i$ , isto é,  $\varepsilon_i = +1$  se  $p_i \geq 0$  e  $\varepsilon_i = -1$  se  $p_i < 0$ . Sejam, analogamente,  $\eta_{ij}$  o sinal de  $p_{ij}$  relativamente a  $f$  e  $\rho_{ij} =$  sinal de  $p_{ij}$  relativamente a  $g \circ f$ . Temos  $gr(g) = \sum_i \varepsilon_i$  e  $\sum_j \eta_{ij} = gr(f)$ , independentemente de  $i$ , pelo Teorema 2. Além disso,  $\rho_{ij} = \eta_{ij} \cdot \varepsilon_i$  e  $gr(g \circ f) = \sum_{i,j} \rho_{ij} = \sum_i \left( \sum_j \eta_{ij} \right) \varepsilon_i = \sum_i gr(f) \cdot \varepsilon_i \cdot gr(f) \cdot \sum \varepsilon_i = gr(f) \cdot gr(g)$ .

**Corolário.** Dadas  $f: M^n \rightarrow N^n$  e  $g: P^r \rightarrow Q^r$ , seja  $f \times g: M \times P \rightarrow N \times Q$  definida por  $f \times g(x, y) = (f(x), g(y))$ . Então  $gr(f \times g) = gr(f) \cdot gr(g)$ .

**Demonstração:** Temos  $f \times g = (f \times j) \cdot (i \times g)$ , onde  $i: M \rightarrow M$  e  $j: Q \rightarrow Q$  indicam aplicações idênticas. Considerando cada variedade  $M \times P$  e  $N \times Q$  munida da orientação produto, é claro que  $gr(f \times j) = gr(f)$  e  $gr(i \times g) = gr(g)$ . O Corolário segue-se então do Teorema 3.

**Exemplo:** 6) A aplicação *antípoda*  $\alpha: S^n \rightarrow S^n$ , definida por  $\alpha(x^1, \dots, x^{n+1}) = (-x^1, \dots, -x^{n+1})$  tem grau  $(-1)^{n+1}$ . Com efeito, temos  $\alpha = f_1 \cdot f_2 \cdots f_{n+1}$ , onde cada  $f_i: (x^1, \dots, x^i, \dots, x^{n+1}) \rightarrow (x^1, \dots, -x^i, \dots, x^{n+1})$  tem grau  $-1$ , em virtude do Exemplo 3. Pelo Teorema 3, temos então  $gr(\alpha) = (-1)^{n+1}$ .

## 4 Grau como razão entre volumes

Inicialmente, faremos uma ligeira exposição dos fatos de álgebra multilinear que vão ser necessários para a inte-

gração de formas diferenciais numa variedade. Mais informações sobre álgebra multilinear podem ser obtidas em [3], [4], [7].

Seja  $E$  um espaço vetorial (real) de dimensão  $n$ .

Uma *forma  $r$ -linear* em  $E$  é uma aplicação

$$f: E \times \cdots \times E \quad (r \text{ fatores}) \rightarrow R,$$

ou seja, uma função real de  $r$  variáveis em  $E$ , a qual é linear separadamente em cada variável. Em termos mais explícitos, para todo índice  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , e todo valor dos argumentos  $v_1, \dots, v_i, \dots, v_r$ , deve-se ter

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_r) &= f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r) + \\ &\quad + f(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_r) \\ f(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_r) &= \alpha f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_r), \end{aligned}$$

sendo  $\alpha$  também um número real arbitrário.

Um exemplo de forma  $r$ -linear é o “produto”  $f = f^1 \cdot f^2 \cdot \dots \cdot f^r$  de formas lineares  $f^i \in E^*$ . Por definição, é:

$$f(v_1, \dots, v_r) = f^1(v_1) \cdot f^2(v_2) \cdot \dots \cdot f^r(v_r).$$

O conjunto das formas  $r$ -lineares em  $E$  constitui, de modo natural, um espaço vetorial  $\mathcal{L}_r(E)$ , no qual a soma de duas formas e o produto de uma forma por um número real são definidos da maneira usual, como operações sobre funções reais.

Dada uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  em  $E$ , o conjunto de todas as formas  $r$ -lineares  $e^{i_1} \cdot e^{i_2} \cdot \dots \cdot e^{i_r}$  que se podem obter como produtos de  $r$  elementos (não necessariamente distintos) da base dual  $\{e^1, \dots, e^n\} \subset E^*$  tem  $n^r$  elementos. É fácil

verificar que esses produtos constituem uma base de  $\mathcal{L}_r(E)$ , de modo que este espaço tem dimensão  $n^r$ .

Consideremos agora o subconjunto  $\Lambda^r(E^*) \subset \mathcal{L}_r(E)$  composto das *formas  $r$ -lineares alternadas*. Uma forma  $r$ -linear  $f \in \mathcal{L}_r(E)$  chama-se *alternada* quando satisfaz à condição:

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_r),$$

isto é, quando muda de sinal quando se permutam as posições de 2 de seus argumentos. Uma condição equivalente a esta consiste em exigir que  $f$  se anule sempre que dois dos seus argumentos assumem valores iguais.

Uma maneira útil de obter uma forma  $r$ -linear alternada  $f$ , a partir de  $r$  formas lineares  $f^1, \dots, f^r \in E^*$ , é tomar o “produto exterior”  $f = f^1 \wedge \dots \wedge f^r$  das formas  $f^i$ , o qual é definido por:

$$f(v_1, \dots, v_r) = \det(f^i(v_j)) = \begin{vmatrix} f^1(v_1) & \dots & f^1(v_r) \\ \dots & \dots & \dots \\ f^r(v_1) & \dots & f^r(v_r) \end{vmatrix}.$$

Usando as propriedades elementares dos determinantes, vê-se que  $f = f^1 \wedge \dots \wedge f^r$ , assim definida, é realmente uma forma  $r$ -linear alternada em  $E$ .

O conjunto  $\Lambda^r(E^*)$  das formas  $r$ -lineares alternadas, como se vê facilmente, constitui um subespaço vetorial de  $\mathcal{L}_r(E)$ . Dada uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  em  $E$ , consideremos a base dual  $\{e^1, \dots, e^n\} \subset E^*$ . O conjunto de todos os produtos exteriores  $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_r}$  de  $r$  elementos da base dual  $\{e^i\}$ , tais que  $i_1 < \dots < i_r$ , constitui uma base de  $\Lambda^r(E^*)$ , com  $\binom{n}{r}$  elementos. Por conseguinte,  $\dim \Lambda^r(E^*) = \binom{n}{r}$ . Se  $r > n$ , é fácil ver que  $\Lambda^r(E^*) = \{0\}$ .



Notemos que o produto exterior  $f = f^1 \wedge \cdots \wedge f^r$  de  $r$  formas lineares muda de sinal se permutamos dois dos seus elementos:

$$f^1 \wedge \cdots \wedge f^i \wedge \cdots \wedge f^j \wedge \cdots \wedge f^r = -f^1 \wedge \cdots \wedge f^j \wedge \cdots \wedge f^i \wedge \cdots \wedge f^r.$$

Isto equivale a dizer que  $f^1 \wedge \cdots \wedge f^r = 0$  sempre que dois dos fatores  $f^i$  forem iguais. Além disso, tem-se as propriedades:

$$\begin{aligned} f^1 \wedge \cdots \wedge (f^i + g^i) \wedge \cdots \wedge f^r &= f^1 \wedge \cdots \wedge f^i \wedge \cdots \wedge f^r \\ &\quad + f^1 \wedge \cdots \wedge g^i \wedge \cdots \wedge f^r; \\ f^1 \wedge \cdots \wedge (\alpha f^i) \wedge \cdots \wedge f^r &= \alpha \cdot f^1 \wedge \cdots \wedge f^i \wedge \cdots \wedge f^r \\ &(\alpha \text{ real}). \end{aligned}$$

Estas propriedades formais do produto exterior também resultam imediatamente da definição, tendo em conta as propriedades elementares dos determinantes. Por outro lado, mencionemos que é possível desenvolver a teoria das formas  $r$ -lineares alternadas e produtos exteriores independentemente de determinantes. Na realidade, a maneira mais cômoda de introduzir os determinantes e estudar suas propriedades é através dessa “álgebra exterior”.

Uma aplicação linear  $A: E \rightarrow F$ , do espaço vetorial  $E$  num espaço vetorial  $F$ , induz uma aplicação linear

$$A^{(r)} = \Lambda^r(A): \Lambda^r(F^*) \rightarrow \Lambda^r(E^*),$$

definida do seguinte modo: se  $f$  é uma forma  $r$ -linear alternada em  $F$ ,  $A^{(r)}(f)$  é a forma  $r$ -linear alternada em  $E$ , tal que

$$A^{(r)}(f)(v_1, \dots, v_r) = f(Av_1, \dots, Av_r), \quad v_1, \dots, v_r \in E. \quad (1)$$

Estamos mais interessados nas formas  $n$ -lineares alternadas num espaço vetorial  $E$  de dimensão  $n$ . Elas constituem um espaço vetorial  $\Lambda^n(E^*)$  cuja dimensão é  $\binom{n}{n}$ , ou seja, igual a 1. Dada uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  em  $E$ , tomamos sua dual  $\{e^1, \dots, e^n\}$  em  $E^*$ , e a forma  $n$ -linear alternada  $e = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$  é uma base de  $\Lambda^n(E^*)$ . Sejam  $f^1, \dots, f^n$  formas lineares em  $E$ . Então  $f^1 = \sum_j \alpha_j^1 e^j, \dots, f^n = \sum_j \alpha_j^n e^j$  e, a partir das propriedades formais de produto exterior, vê-se que

$$f^1 \wedge \dots \wedge f^n = \det(\alpha_j^i) \cdot e^1 \wedge \dots \wedge e^n.$$

Em particular,  $f^1 \wedge \dots \wedge f^n \neq 0$  (para  $\dim E = n$ ) se, e somente se,  $f^1, \dots, f^n$  são linearmente independentes em  $E^*$ . Reciprocamente, dados os vetores  $v_1, \dots, v_n \in E$  e uma forma  $n$ -linear alternada  $f \neq 0$  em  $E$ , tem-se  $f(v_1, \dots, v_n) \neq 0$  se, e somente se, os vetores  $v_i$  são independentes. Com efeito, tem-se  $f = a \cdot e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ , donde  $f(v_1, \dots, v_n) = a \cdot \det(e^i(v_j))$ .

Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais da mesma dimensão  $n$ , e  $A: E \rightarrow F$  uma aplicação linear. Escolhidas as bases  $\{e_1, \dots, e_n\}$  em  $E$  e  $\{f_1, \dots, f_n\}$  em  $F$ , se a matriz de  $A$  relativamente a essas bases é  $(\alpha_j^i)$ , então a matriz de  $A^{(n)}: \Lambda^n(F^*) \rightarrow \Lambda^n(E^*)$ , relativamente às bases  $\{e^1 \dots e^n\}$  e  $\{f^1 \dots f^n\}$ , é  $\det(\alpha_j^i)$ . (Como estes últimos espaços têm dimensão 1, uma matriz identifica-se a um número real).

Passemos agora a considerar uma variedade diferenciável  $M^n$ . Dado um ponto  $p \in M$ , todo sistema de coordenadas admissível  $x: U \rightarrow R^n$ , válido numa vizinhança  $V$  de  $p$ , define uma base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$  no espaço tangente  $M_p$ , chamada a base associada ao sistema  $x$ . A base

dual desta, em  $M_p^*$ , será indicada com  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ . Assim,  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  constituirá uma base para o espaço uni-dimensional  $\Lambda^n(M_p^*)$  das formas  $n$ -lineares alternadas. Uma forma  $n$ -linear alternada qualquer  $\omega_p \in \Lambda^n(M_p^*)$  exprimir-se-á, em termos dessa base, como

$$\omega_p = a \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (*)$$

onde  $a$  é um número real. A propósito, a coordenada  $a$  da forma  $\omega_p$  relativamente à base  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  é caracterizada pela igualdade:

$$s = \omega_p \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right),$$

isto é,  $a$  é o valor que a forma  $\omega_p$  assume na  $n$ -upla de vetores  $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$ . Com efeito,  $\omega_p(\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n) = a \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n (\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n) = a \cdot \det(dx^i(\partial/\partial x^j)) = a \cdot \det(\delta_j^i) = a$ .

Se, noutro sistema de coordenadas  $y: W \rightarrow R^n$ , válido na vizinhança  $W$  de  $p$ , a forma  $\omega_p$  assume a expressão

$$\omega_p = b \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n, \quad (**)$$

a relação entre os coeficientes  $a$  e  $b$  das expressões (\*) e (\*\*) é a seguinte:

$$a = b \cdot \det(\partial y^i / \partial x^j), \quad (***)$$

onde  $(\partial y^i / \partial x^j)$  é a matriz jacobiana da mudança de coordenadas  $y \circ x^{-1}$ , o determinante acima sendo calculado no ponto  $x(p)$ . Isto resulta simplesmente do fato de que, para cada  $i$ ,  $dy^i = \sum_j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$ , donde  $dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = \det \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ , como já vimos anteriormente.

Uma forma *diferencial exterior de grau  $n$*  ou, simplesmente, uma *forma diferencial de grau  $n$*  numa variedade  $M^n$  é uma aplicação

$$\omega: p \rightarrow \omega_p \in \Lambda^n(M_p^*),$$

que associa a cada ponto  $p \in M$  uma forma  $n$ -linear alternada  $\omega_p$  no espaço tangente  $M_p$ . Dado um sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$  em  $M$ , tem-se, para cada  $p \in U$ ,

$$\omega_p = a(p) \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

onde  $a: U \rightarrow R$  é uma função real do ponto  $p \in U$ . O fato de  $a(p)$  ser uma função diferenciável não depende do sistema de coordenadas utilizado. Noutro sistema  $y: U \rightarrow R^n$  teríamos, para todo  $p \in U$ ,  $\omega_p = b(p) \cdot dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$ , com  $b(p) = a(p) \cdot \det(\partial x^i / \partial y^j)$  e  $b(p)$  seria ainda diferenciável se  $a(p)$  o fosse. Diremos então que uma forma diferencial  $\omega$  é de classe  $C^\infty$  se todo ponto  $p_0 \in M$  possui uma vizinhança coordenada na qual  $\omega$  admite uma expressão como a acima, com  $a(p)$  diferenciável.

Mesmo que não o mencionemos explicitamente, todas as formas diferenciais que considerarmos serão de classe  $C^\infty$ .

Sejam  $M^n, N^n$  variedades diferenciáveis de mesma dimensão, e  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. A cada forma diferencial  $\omega$ , de grau  $n$ , sobre  $N^n$ ,  $f$  faz corresponder uma forma diferencial  $f^*\omega$ , de mesmo grau, sobre a variedade  $M$ . Em cada ponto  $p \in M$ ,  $(f^*\omega)_p$  é a forma  $n$ -linear alternada que associa a uma  $n$ -upla  $v_1, \dots, v_n$  de vetores em  $M_p$  o número

$$(f^*\omega)_p(v_1, \dots, v_n) = \omega_{f(p)}(f_*v_1, \dots, f_*v_n),$$

onde  $f_*v_i \in N_{f(p)}$  são as imagens dos vetores pela aplicação linear  $f_*: M_p \rightarrow N_{f(p)}$ , induzida por  $f$  no ponto  $p$ . A aplicação  $\omega \rightarrow f^*\omega$  é linear:  $f^*(\omega + \omega') = f^*\omega + f^*\omega'$ ,  $f^*(\alpha\omega) = \alpha f^*(\omega)$ ,  $\alpha$  escalar constante. Na realidade, para cada ponto  $p \in M$ ,  $(f^*\omega)_p$  não é senão a forma que anteriormente havíamos indicado por  $(f_*)^{(r)}(\omega_{f(p)})$ . Por conseguinte, (vide fórmula (1) acima) se  $y: V \rightarrow R^n$  é um sistema de coordenadas em  $N$  e  $x: U \rightarrow R^n$  é um sistema em  $M$  com  $f(U) \subset V$ , podemos escrever:

$$\omega = a dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n \quad (a: V \rightarrow R \text{ uma função } C^\infty)$$

e daí:  $f^*\omega = a \det \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ . Mais precisamente, para cada  $p \in U$ , temos:

$$(f^*\omega)_p = a(f(p)) \cdot \det \left[ \frac{\partial y^i}{\partial x^j} (x(p)) \right] dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Observamos, de passagem, que, qualquer que seja a forma diferencial  $\omega$ ,  $(f^*\omega)_p$  é nula sempre que o ponto  $p$  não for um ponto regular de  $f$  (isto é,  $f_*$  não for biunívoca em  $p$ ).

Devemos agora definir a integral  $\int_M \omega$  de uma forma diferencial  $\omega$ , de grau  $n$ , sobre uma variedade orientada  $M^n$ , de dimensão  $n$ . Consideraremos inicialmente o caso em que  $M$  é completa.

A definição de  $\int_M \omega$  será feita em duas etapas.

1) Suponhamos, em primeiro lugar, que existe um sistema de coordenadas positivo  $x: U \rightarrow R^n$ , em  $M$ , tal que  $\omega_p = 0$  para  $p \in M - U$ . Podemos admitir (e o faremos) que  $x(U)$  conjunto limitado em  $R^n$ . Temos então

$\omega = a dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ ,  $a: U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável que tende para zero na fronteira de  $U$ . Por abuso de notação, consideraremos também  $a = a(x^1, \dots, x^n)$  como uma função diferenciável, definida no conjunto limitado  $x(U) \subset \mathbb{R}^n$ , a qual se estende continuamente ao compacto  $\overline{x(U)}$ , anulando-se na fronteira. Assim,  $a(x^1, \dots, x^n)$  é uma função contínua e limitada no conjunto limitado  $x(U)$ , donde integrável aí. Poremos então:

$$\int_M \omega = \int_{x(U)} a(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n,$$

onde a integral do 2º membro é tomada no sentido comum de integral de uma função numérica de  $n$  variáveis.

Resta mostrar que a definição de  $\int_M \omega$  não depende do sistema de coordenadas escolhido. Com efeito, seja  $y: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  outro sistema positivo com  $\omega_p = 0$  para todo  $p \in M - V$ . Considerando  $W = U \cap V$ , temos também  $\omega_p = 0$  para todo  $p \in M - W$ . Então, escrevendo  $\omega = b dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$ , com  $b = b(y^1, \dots, y^n)$  uma função numérica definida em  $y(V)$ , temos:

$$\begin{aligned} \int_{x(U)} a dx^1 \dots dx^n &= \int_{x(W)} a dx^1 \dots dx^n \quad \text{e} \\ \int_{y(V)} b dy^1 \dots dy^n &= \int_{y(W)} b dy^1 \dots dy^n. \end{aligned}$$

Por outro lado, considerando-se o difeomorfismo  $y \circ x^{-1}: x(W) \rightarrow y(W)$  cujo jacobiano é sempre  $> 0$ , o teorema clássico de mudança de variável nas integrais múltiplas nos

dá

$$\int_{y(W)} b(y^1, \dots, y^n) dy^1 \dots dy^n = \int_{x(W)} b(y^1(x^1 \dots x^n), \dots, y^n(x^1 \dots x^n)) \det \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Mas, pela fórmula de mudança de coordenadas (\*\*\*) , acima obtida, temos

$$\begin{aligned} & b(y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n)) \det \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) \\ &= b(p) \det \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^i} \right) = a(p) = a(x^1, \dots, x^n). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} & \int_{y(M)} b(y^1, \dots, y^n) dy^1 \dots dy^n \\ &= \int_{x(W)} a(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

2) Seja, agora.  $\omega$  uma forma diferencial arbitrária, de grau  $n$ , na variedade compacta  $M$ . Consideramos uma cobertura finita  $\{U_1, \dots, U_r\}$  de  $M$  por abertos onde valem sistemas de coordenadas  $x_i: U_i \rightarrow R^n$ , sendo cada  $x_i(U_i)$  limitado em  $R^n$ . Seja  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$  uma partição diferenciável da unidade, subordinada a essa cobertura. Tomamos as  $r$  formas diferenciais de grau  $n$ :  $\omega = \varphi_1 \omega, \dots, \omega_r = \varphi_r \omega$ .

Cada função  $\varphi_i: M \rightarrow R$  sendo nula fora de  $U_i$ , cada forma  $\omega_i$  também é nula fora desse mesmo conjunto. Podemos então, pela primeira parte, integrar  $\omega_i$  e definimos

$$\int_M \omega = \sum_i \int \omega_i.$$

Resta mostrar que o primeiro membro é bem definido, independentemente da partição da unidade escolhida. Seja então  $\{\psi_1, \dots, \psi_s\}$  uma nova partição da unidade, subordinada a uma cobertura  $\{V_1, \dots, V_s\}$  de  $M$  por vizinhanças coordenadas do tipo que consideramos. Ponhamos  $\omega'_j = \psi_j \omega$  e  $\omega_{ij} = \varphi_i \psi_j \omega$ . Notemos que como  $\sum \varphi_i = \sum \psi_j = 1$ , para todo  $i$  e todo  $j$ , temos  $\sum_i \omega_{ij} = \omega'_j$  e  $\sum_j \omega_{ij} = \omega_i$ . Assim vale, sucessivamente: (usando o fato de que  $\int \Sigma = \Sigma \int$  para somas finitas, e integrais no espaço euclidiano)

$$\begin{aligned} \sum_i \int \omega_i &= \sum_i \int \sum_j \omega_{ij} = \sum_{i,j} \int \omega_{ij} \\ &= \sum_j \int \sum_i \omega_{ij} = \sum_j \int \omega'_j, \end{aligned}$$

o que mostra que a definição de  $\int_M \omega$  é, de fato, independente da partição da unidade escolhida.

Para sermos completos, devemos observar também que a definição de  $\int \omega$  dada no caso 1), em que  $\omega$  é nula fora de uma vizinhança coordenada  $U$ , coincide, neste caso, com a



definição geral de  $\int \omega$  dada em 2). Com efeito, designemos momentaneamente a integral definida em 1) por  $\widehat{\int}$ , e a definida em 2) por  $\int$ . Então, dada  $\omega$  nula fora de  $U$ , tomamos uma partição da unidade  $\{\varphi_i\}$  em  $M$ . Cada forma  $\varphi_i\omega$  é também nula fora de  $U$  e daí, pela atividade da integral no espaço euclidiano, temos:

$$\int \omega = \sum_i \widehat{\int} \varphi_i\omega = \widehat{\int} \sum \varphi_i\omega = \widehat{\int} \omega,$$

como queríamos demonstrar.

O leitor verificará sem dificuldade que  $\int_M (\omega + \bar{\omega}) = \int_M \omega + \int_M \bar{\omega}$  e, se  $\alpha \in R$ ,  $\int_M \alpha\omega = \alpha \int_M \omega$ .

Abordemos o caso de uma variedade orientada não compacta  $M^n$ . Como se observa mesmo na reta, onde as formas diferenciais de grau 1 identificam-se às funções reais, existirão formas integráveis e formas não-integráveis. No caso geral, introduziremos primeiramente uma definição.

Diremos que uma forma diferencial de grau  $n$ ,  $\omega$ , em  $M$ , é *positiva* (ou, mais precisamente, *não-negativa*), e escreveremos  $\omega \geq 0$ , quando para todo sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$ , pertencente à orientação de  $M$ , tivermos  $\omega = a dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ , com  $a(p) \geq 0$  para todo  $p \in U$ . Como  $M$  está orientada, a propriedade de ser  $a(p) \geq 0$  não depende do sistema de coordenadas escolhido.

Definiremos, em primeiro lugar, a integral  $\int_M \omega$  de uma forma diferencial  $\omega \geq 0$ . Se existir uma vizinhança coordenada  $U$ , com  $x(U)$  limitado, tal que  $\omega_p = 0$  para  $p \in M - U$ , definiremos  $\int_M \omega$  como em 1) acima. No caso geral, tomaremos uma partição diferenciável da unidade  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i, \dots\}$ , subordinada a uma cobertura localmente finita e enumerável  $\{U_1, U_2, \dots, U_i, \dots\}$ , e poremos

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int \varphi_i \omega.$$

Bem entendido, no segundo membro temos uma série de números reais  $\geq 0$ . Se esta série for convergente, diremos que  $\omega$  é *integrável* e a soma da série definirá a integral de  $\omega$  sobre  $M$ . Se a série for divergente, a igualdade acima significará tão somente que  $\omega$  não é integrável. Resta mostrar que o fato de ser integrável e, no caso afirmativo, o valor da integral, depende somente de  $\omega$  mas não da partição da unidade considerada. Para tal, usaremos dois resultados clássicos de Análise. O primeiro deles afirma que, numa série dupla de termos positivos, a convergência e o valor da soma não dependem da ordem de somação. O segundo diz que, para integrais sobre um domínio limitado do  $R^n$ , se  $\Sigma f_k$  é uma série de funções contínuas  $\geq 0$  cuja soma é uma função contínua  $f$ , tem-se  $\int f = \int \Sigma f_k = \Sigma \int f_k$ . (Este resultado é válido para integrais de Riemann, mas sua demonstração é muito mais simples quando se usa a integral de Lebesgue). Considerada, então, outra partição

da unidade  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_j, \dots\}$ , temos:

$$\begin{aligned} \sum_i \int \varphi_i &= \sum_i \int \sum_j \psi_j \varphi_i \omega = \sum_i \sum_j \int \psi_j \varphi_i \omega \\ &= \sum_j \sum_i \int \varphi_i \psi_j \omega = \sum_j \int \sum_i \varphi_i \psi_j \omega \\ &= \sum_j \int \psi_j \omega. \end{aligned}$$

Cada uma dessas igualdades é válida no sentido forte, isto é, se um dos membros for convergente, o outro também será e vale a igualdade. Vê-se portanto que  $\int_M \omega$  é bem definida, para  $\omega \geq 0$ .

Dada uma forma contínua qualquer  $\omega$  em  $M$ , podemos escrevê-la como diferença entre duas formas  $\geq 0$ :  $\omega = \omega^+ - \omega^-$ . Esta decomposição é única se exigirmos que, em cada ponto  $p \in M$ , no máximo uma das formas  $\omega^+$  e  $\omega^-$  seja  $\neq 0$ . Então  $\omega^+$  chama-se a *parte positiva* e  $\omega^-$  a *parte negativa* de  $\omega$ . Se, num dado sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$ , positivo, tem-se  $\omega = a dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ , então  $\omega^+ = a^+ dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  e  $\omega^- = a^- dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ , onde, para cada  $p \in U$ ,  $a^+(p) = \max\{a(p), 0\}$  e  $a^-(p) = -\min\{a(p), 0\}$ . Como as funções  $a^+$  e  $a^-$  são contínuas (embora em geral não diferenciáveis), segue-se que as formas  $\omega^+$  e  $\omega^-$  são contínuas sempre que  $\omega$  o for, mas não serão sempre diferenciáveis, mesmo que  $\omega$  o seja.

Diremos que  $\omega$  é *integrável* quando as formas positivas  $\omega^+$  e  $\omega^-$  o forem, e definiremos, neste caso,

$$\int_M \omega = \int_M \omega^+ - \int_M \omega^-.$$

É fácil ver que a integral (de formas integráveis) é linear nessas formas, e que  $\omega \geq 0 \Rightarrow \int \omega \geq 0$ . Se  $\omega \geq 0$  e existir um ponto  $p \in M$  tal que  $\omega_p > 0$ , então  $\int_M \omega > 0$ .

Discutiremos agora a existência, em toda variedade orientada, de uma forma diferencial contínua  $\omega$  de grau  $n$ , estritamente positiva ( $\omega > 0$ ).

**Teorema 4.** *Uma variedade diferenciável  $M$  é orientável se, e somente se, existe sobre  $M$  uma forma diferencial contínua  $\omega$ , de grau  $n$ , tal que  $\omega_p \neq 0$  para todo  $p \in M$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que exista  $\omega$  contínua, com  $\omega_p \neq 0$  para todo  $p \in M$ , e mostremos que  $M$  é orientável. Seja  $\mathfrak{A}$  o conjunto de todos os sistemas de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$ , admissíveis em  $M$ , tais que  $U$  é conexa e a expressão de  $\omega$  relativamente a  $x$  é  $\omega = a dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ , com  $a(p) > 0$  para todo  $p \in U$ . Vê-se sem dificuldade (usando a continuidade de  $\omega$ ) que  $\mathfrak{A}$  é um atlas sobre  $M$ . Além disso, se  $x: U \rightarrow R^n$  e  $y: V \rightarrow R^n$  pertencem a  $\mathfrak{A}$ , com  $U \cap V \neq \emptyset$ , para todo ponto  $p \in U \cap V$  tem-se  $\omega_p = a(p) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = b(p) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$ , com  $b(p) = a(p) \cdot \det(\partial y^i / \partial x^j)$ . Como  $a(p) > 0$  e  $b(p) > 0$ , segue-se que  $\det(\partial y^i / \partial x^j) > 0$  em todo ponto  $p \in U \cap V$ . Por conseguinte, o atlas  $\mathfrak{A}$  é coerente, e portanto fornece uma orientação para a variedade  $M$ . Reciprocamente, suponhamos que  $M$  é orientável, e seja  $\mathfrak{A}$  um atlas coerente sobre  $M$ , constituído pelos sistemas de coordenadas  $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow R^n$ . Podemos admitir que as vizinhanças  $U_\alpha$  formam uma cobertura localmente finita de  $M$ . Seja  $\{\varphi_\alpha\}$  uma partição da unidade subordinada à cobertura em questão. Definamos a forma  $\omega$  pondo, para cada  $p \in M$ ,

$\omega_p = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(p) dx_{\alpha}^1 \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha}^n$ . É claro que, nesta expressão, comparecem efetivamente apenas as parcelas correspondentes aos índices  $\alpha$  com  $p \in U_{\alpha}$ . Além disso, como o atlas  $\mathfrak{A}$  é coerente, se reduzirmos a expressão de  $\omega_p$  dada acima ao mesmo sistema de coordenadas  $x_{\beta}$ , com  $p \in I_{\beta}$ , teremos

$$\omega_p = \left[ \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(p) \det \left( \frac{\partial x_{\alpha}^i}{\partial x_{\beta}^j} \right) \right] dx_{\beta}^1 \wedge \cdots \wedge dx_{\beta}^n,$$

onde a soma entre colchetes é evidentemente  $> 0$ . Segue-se que  $\omega_p \neq 0$ , para todo  $p \in M$ .

**Corolário.** *Numa variedade orientável  $M$  existe sempre uma forma diferencial contínua  $\omega$ , de grau  $n$ , estritamente positiva ( $\omega > 0$ ).*

Com efeito, pelo Teorema 4, existe sempre uma forma contínua  $\omega^*$  em  $M$ , com  $\omega_p^* \neq 0$  para todo  $p \in M$ . Segue-se daí que, em cada componente conexa de  $M$ , o sinal de  $\omega$  não muda. Definamos então  $\omega$  pondo  $\omega = \omega^*$  nas componentes conexas de  $M$  onde  $\omega^* > 0$ , e  $\omega = -\omega^*$  nas componentes de  $M$  onde  $\omega^* < 0$ .

**Observação:** Podemos definir uma *orientação* numa variedade  $M$  como uma classe de equivalência de formas contínuas  $\omega, \bar{\omega}$  são equivalentes se  $\omega_p = \lambda(p)\bar{\omega}_p$ , com  $\lambda(p) > 0$  para todo  $p \in M$ . O Teorema 4 estabelece uma correspondência biunívoca entre as orientações definidas por meio de atlas coerentes, e por formas diferenciais.

Um exemplo importante de forma contínua  $> 0$  é dado pelo elemento de *volume* numa variedade riemanniana ori-

entada. Seja pois  $M$  uma variedade de Riemann orientada. Motivados pelo caso elementar de  $R^3$ , definiremos, em cada espaço tangente  $M_p$ , o volume (orientado) do paralelepípedo gerado por  $n$  vetores  $v_1, \dots, v_n \in M_p$  através da fórmula

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_n) = \pm \sqrt{\det(v_i \cdot v_j)}.$$

O sinal do volume é tomado  $+$  se  $v_1, \dots, v_n$ , nesta ordem, definem a orientação positiva de  $M_p$ ; ele será  $-$  quando esses vetores, na ordem dada, determinam a orientação negativa de  $M_p$ . Se  $v_1, \dots, v_n$  são linearmente dependentes, o volume deverá ser nulo e devemos mostrar, correspondentemente, que neste caso o 2º membro da fórmula acima é igual a zero. Devemos mostrar também que o determinante da matriz formada pelos produtos escalares  $v_i \cdot v_j$  é sempre  $> 0$ , a fim de que sua raiz quadrada seja real. Para isso, consideramos uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  no espaço  $M_p$ . Para cada um dos vetores  $v_i$  dados, temos  $v_i = \sum_k \alpha_{ik} e_k$ , onde  $\alpha_{ik} = v_i \cdot e_k$  em virtude da ortonormalidade da base. Temos

$$v_i \cdot v_j = \sum_k \alpha_{ik} \cdot \alpha_{jk} = \sum_k (v_i \cdot e_k)(v_j \cdot e_k).$$

Pela regra de multiplicação de determinantes, vem

$$\det(v_i \cdot v_j) = [\det(\alpha_{ij})]^2 = [\det(v_i \cdot e_j)]^2.$$

Vemos assim que  $\det(v_i \cdot v_j) \geq 0$ , como queríamos demonstrar. Vemos além disso, se a base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  for positiva em  $M_p$ , teremos também

$$\text{vol}(v_1, \dots, v_n) = \det(v_i \cdot e_j),$$

onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é qualquer base ortonormal  $> 0$  em  $M_p$ . Somente a igualdade dos sinais nesta última fórmula está por justificar. Mas isto é imediato, pois, pela definição de base  $> 0$ , os vetores  $v_1, \dots, v_n$  definem uma orientação  $> 0$  se, e somente se  $\det(\alpha_{ij}) = \det(v_i \cdot e_j) > 0$ . Finalmente,  $\det(v_i \cdot v_j) = [\det(\alpha_{ij})]^2 = 0$  se, e somente se, os vetores  $v_i$  são linearmente dependentes. Estão justificados portanto todos os detalhes relativos à fórmula do volume de um paralelepípedo.

Notemos ainda um fato adicional que de modo nenhum é evidente a partir da fórmula  $\text{vol}(v_1, \dots, v_n) = \pm \sqrt{\det(v_i \cdot v_j)}$ . Trata-se do seguinte: o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores  $v_1, \dots, v_n$  é uma forma  $n$ -linear alternada em  $M_p$ . Isto decorre imediatamente da expressão do volume como  $\det(v_i \cdot e_j)$ .

Definiremos então, na variedade de Riemann orientada  $M$ , uma forma diferencial  $\sigma$ , de grau  $n$ , chamada o *elemento do volume* de  $M$ , pondo, para todo  $p \in M$ ,

$$\sigma_p(v_1, \dots, v_n) = \text{vol}(v_1, \dots, v_n) = \pm \sqrt{\det(v_i \cdot v_j)};$$

$$v_1, \dots, v_n \in M_p.$$

Para mostrar que  $\sigma$  é uma forma contínua (na realidade, diferenciável, se a métrica de  $M$  o for), vejamos sua expressão em termos de um sistema de coordenadas positivo  $x: U \rightarrow R^n$  em  $M$ . Como de costume, para cada  $p \in U$ , escrevemos  $g_{ij}(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j}(p) =$  produto escalar de vetores da base de  $M_p$  associada a  $x$ . Escrevamos  $g(p) = \det(g_{ij}(p))$ . Então

$$\sigma_p \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = \sqrt{\det(g_{ij}(p))} = \sqrt{g(p)},$$

onde o sinal  $+$  foi escolhido porque o sistema  $x$  é positivo. Segue-se que

$$\sigma = \sqrt{g} \cdot dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Em particular, vemos que  $\sigma$  é contínua,  $\sigma > 0$ , e  $\sigma \in C^\infty$  se a métrica de  $M$  é  $C^\infty$ . Como toda variedade diferenciável admite uma métrica riemanniana, o elemento de volume fornece uma nova demonstração de que em toda variedade orientável existe uma forma contínua  $\omega > 0$ .

O número  $c = \int_M \sigma$  chama-se o *volume* da variedade de Riemann  $M$ . Quando  $M$  é compacta, seu volume  $c$  é sempre finito. No caso de  $M$  não ser compacta seu volume pode ser infinito.

Quando  $M = M^1$  é uma curva ou  $M = M^2$  é uma superfície regular do espaço euclidiano  $R^3$ , (com a métrica riemanniana induzida) mostra-se por métodos elementares de Cálculo que o “volume” como foi acima definido coincide com o “comprimento de arco” e a “área de uma superfície” respectivamente.

**Lema 6.** *Em toda variedade diferenciável orientada  $M^n$ , existe uma forma diferencial de grau  $n$ , de classe  $C^\infty$ , estritamente positiva e integrável.*

**Demonstração:** A existência de uma tal forma integrável só constitui problema nas variedades não compactas. Consideramos uma cobertura enumerável localmente finita  $\{U_\alpha\}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$  formada por domínios de sistemas de coordenadas positivos  $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow R^n$  em  $M$ , tais que cada  $x_\alpha(U_\alpha)$  é um cubo de aresta unitária em  $R^n$ . Em seguida,



tomemos uma partição da unidade  $\{\varphi_\alpha\}$  subordinada à cobertura dada. Finalmente, para cada  $p \in M$ , ponhamos

$$\omega_p = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} \varphi_\alpha(p) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n.$$

Tem-se  $\omega > 0$ . Quanto à integrabilidade de  $\omega$ , vale:

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} \int_{x_\alpha(U_\alpha)} \varphi_\alpha(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n \\ &\leq \sum \frac{1}{\alpha^2} < +\infty, \end{aligned}$$

pois cada função  $\varphi_\alpha$  satisfaz  $0 \leq \varphi_\alpha \leq 1$  e o volume de cada cubo  $x_\alpha(U_\alpha)$  em  $R^n$  é igual a 1.

O Lema 6 implica o seguinte teorema:

**Teorema 5.** *Toda variedade diferenciável orientada  $M$  pode ser dotada de uma métrica riemanniana relativamente a qual  $M$  possui volume finito.*

**Demonstração:** Basta mostrar, em virtude do lema, que toda forma  $\omega > 0$  em  $M$  é o elemento de volume de alguma métrica riemanniana em  $M$ . Ora, dada  $\omega > 0$ , consideremos uma métrica arbitrária em  $M$ , cujo elemento de volume associado indicaremos com  $\sigma$ . Indiquemos também com  $u * v$  o produto escalar de dois vetores tangentes segundo essa métrica. Como as formas  $\omega$  e  $\sigma$  são ambas  $> 0$ , existe, para cada  $p \in M$ , um número  $\lambda(p) > 0$  tal que  $\omega_p = \lambda(p) \cdot \sigma_p$ . A função real  $\lambda: M \rightarrow R$  é diferenciável, desde que  $\omega$  e  $\sigma$  o sejam. Definiremos agora uma nova métrica em  $M$  através de um produto interno que indicaremos por  $u \cdot v$ , o qual é assim introduzido: se

$u, v \in M_p$ , então  $u \cdot v = \lambda(p)^{2/n^2} \cdot u * v$ . Vê-se facilmente que o elemento de volume correspondente a esta nova métrica é precisamente a forma  $\omega$  inicialmente dada.

O teorema seguinte, que é o principal resultado deste parágrafo, fornece uma expressão global para o grau de uma aplicação diferenciável. Enunciá-lo-emos em termos de volume numa variedade de Riemann, apenas com o objetivo de dar uma interpretação geométrica intuitiva ao seu conteúdo. Entretanto, o leitor não terá dificuldade de observar que o teorema é ainda válido quando se toma a forma  $\sigma$  que nele consta como qualquer forma integrável  $> 0$  em  $N$  (não necessariamente igual ao elemento de volume).

**Teorema 6.** *Seja  $N^n$  uma variedade de Riemann conexa, orientada, de volume finito  $c = \int_M \sigma$ , e  $f: M^n \rightarrow N^n$  uma aplicação diferenciável própria. Então  $f * \sigma$  é uma forma integrável em  $M$  e, além disso, tem-se*

$$\frac{1}{c} \int_M f * \sigma = \text{gr}(f).$$

**Observação:** Em cada ponto  $p \in M$ , o valor  $(f * \sigma)_p(v_1, \dots, v_n)$  da forma  $f * \sigma$  na  $n$ -upla de vetores tangentes  $v_1, \dots, v_n \in M_p$  é igual ao volume (orientado) do paralelepípedo gerado pelos vetores  $f_*(v_1), \dots, f_*(v_n)$  em  $N_{f(p)}$ . Intuitivamente, isto significa que  $f * \sigma$  é o elemento infinitesimal do volume da imagem de  $M$  por  $f$ . Assim, a integral  $\int_M f * \sigma$  tem o significado de volume “orientado” da imagem de  $M$  por  $f$ . (Isto é, o volume das partes cobertas positivamente por  $f$  é contado com o sinal  $+$  e as partes cobertas negativamente são contadas com o sinal  $-$ ). A fórmula exprime,

portanto, que o grau de  $f$  é a relação entre o volume “orientado” coberto por  $f(M)$  em  $N$  e o volume de  $N$ . Note-se que não é evidente a priori que o primeiro membro dessa fórmula seja um número inteiro.

### Demonstração:

**1º caso.** Suponhamos que a aplicação  $f$  seja regular, isto é, que em todo ponto  $p \in M$  a aplicação linear  $f_*: M_p \rightarrow N_{f(p)}$  seja um isomorfismo. Então, em cada componente conexa de  $M$ , os pontos têm todos o mesmo sinal. Ora, se  $M = \cup M_j$  é a decomposição de  $M$  como reunião de suas componentes conexas, e  $f_j = f|_{M_j}$ , tem-se evidentemente  $\text{gr}(f) = \sum_j \text{gr}(f_j)$  e  $\int_M f * \sigma = \sum_j \int_{M_j} f_j * \sigma$ .

Portanto, basta demonstrar este 1º caso supondo que todos os pontos de  $M$  têm o mesmo sinal. Para fixar as idéias, admitiremos que são todos positivos. Sejam  $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow R^n$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots$ , sistemas de coordenadas positivos em  $N$ , tais que cada  $x_\alpha(U_\alpha)$  é limitado em  $R^n$  e os abertos  $U_\alpha$  formam uma cobertura localmente finita de  $N$ . Em virtude do Lema 4, §3, (vide Escólio), podemos tomar os  $U_\alpha$  de modo que  $f^{-1}(U_\alpha) = U_{\alpha i} \cup \dots \cup U_{\alpha r}$ , reunião disjunta, onde  $f$  aplica cada  $U_{\alpha i}$  difeomorficamente sobre  $U_\alpha$ . Seja  $\{\varphi_\alpha\}$  uma partição diferenciável da unidade subordinada à cobertura  $\{U_\alpha\}$ . Os abertos  $f^{-1}(U_\alpha)$  constituem uma cobertura localmente finita de  $M$  e as funções  $\psi_\alpha = \varphi_\alpha \cdot f$  definem uma partição da unidade subordinada a esta cobertura. Diante das hipóteses feitas, a forma  $f * \sigma$  é positiva, donde

$$\int_M f * \sigma = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \int_M (\psi_\alpha \cdot f * \sigma), \quad (1)$$

sendo  $f * \sigma$  integrável se, e somente se, a série do segundo membro é convergente. Como facilmente se verifica,  $\psi_\alpha \cdot f * \sigma = f * (\varphi_\alpha \cdot \sigma)$ . Além disso, para cada  $\alpha$ ,

$$\int_M (\psi_\alpha \cdot f * \sigma) = \int_M f * (\varphi_\alpha \cdot \sigma) = \sum_{i=1}^r \int_{U_{\alpha i}} f * (\varphi_\alpha \cdot \sigma) \quad (2)$$

pois  $\psi_\alpha$  é nula fora de  $f^{-1}(U_\alpha)$  e este conjunto é a reunião disjunta dos  $U_{\alpha i}$ . Por outro lado, para cada  $i$ ,  $f$  é um difeomorfismo de  $U_{\alpha i}$  sobre  $U_\alpha$ . Segue-se então do teorema clássico de mudança de variáveis em integrais múltiplas que

$$\int_{U_{\alpha i}} f * (\varphi_\alpha \sigma) = \int_{U_\alpha} \varphi_\alpha \sigma,$$

pois estamos admitindo que o jacobiano de  $f$  é sempre  $> 0$ . Como  $r = \text{gr}(f)$ , temos

$$\sum_{i=1}^r \int_{U_{\alpha i}} f * (\varphi_\alpha) = \text{gr}(f) \cdot \int_{U_\alpha} \varphi_\alpha \cdot \sigma.$$

Substituindo este valor sucessivamente em (2) e em (1), obtemos:

$$\int_M f * \sigma = \text{gr}(f) \sum_{\alpha} \int_{U_\alpha} \varphi_\alpha \cdot \sigma = \text{gr}(f) \cdot \int_N \sigma,$$

o que mostra ser  $f * \sigma$  integrável e fornece a fórmula procurada.

**2º caso.** A aplicação própria  $f: M \rightarrow N$  é qualquer. Reduziremos este caso ao anterior, da seguinte maneira. Seja  $S$  o conjunto dos valores singulares de  $f$  em  $N$ , isto

é,  $S$  é formado pelos pontos  $q \in N$  tais que, em algum ponto  $p \in f^{-1}(q)$ ,  $f_*$  não é um isomorfismo. Então  $S$  é um conjunto fechado em  $N$  e, pelo teorema de Sard,  $S$  tem medida nula. Por conseguinte,  $\int_N \sigma = \int_{N-S} \sigma$ . Consideremos agora  $f^{-1}(S) \subset M$ . Temos  $f^{-1}(S) = A \cup B$  onde  $A$  é o conjunto dos pontos de  $M$  onde  $f_*$  não é um isomorfismo (pontos singulares de  $f$  em  $M$ ) e  $B$  é o conjunto dos pontos regulares pertencentes a  $f^{-1}(S)$ . É claro que  $f^{-1}(S)$  é fechado em  $M$ . Além disso, os conjuntos  $A$  e  $B$  são tais que  $f_*\sigma$  se anula em todos os pontos de  $A$ , e  $B$  ter medida nula. A primeira afirmação é óbvia. Quanto à segunda, basta observar que todo ponto  $p \in B$  possui uma vizinhança  $U$  que é aplicada difeomorficamente por  $f$  sobre uma vizinhança  $V$  do ponto  $q = f(p)$ , sendo claro que  $f(U \cap B) \subset V \cap S$ . Com  $V \cap S$  tem medida nula em  $N$ , segue-se que  $U \cap B$  tem medida nula. Assim, todo ponto  $p \in B$  possui uma vizinhança  $U$  em  $M$  tal que  $U \cap B$  tem medida nula e, por conseguinte, o conjunto  $M$  tem medida nula. Então

$$\int_M f_*\sigma = \int_{M-f^{-1}(S)} f_*\sigma.$$

Agora, observemos que a restrição de  $f$  define uma aplicação própria  $g: M - f^{-1}(S) \rightarrow N - S$ , a qual é regular e, em cada ponto  $q \in N - S$ ,  $\text{gr}_q(g) = \text{gr}_q(f)$ . Em virtude do primeiro caso, podemos então escrever:

$$\begin{aligned} \int_M f_*\sigma &= \int_{M-f^{-1}(S)} f_*\sigma = \int_{M-f^{-1}(S)} g_*\sigma \\ &= \text{gr}(g) \cdot \int_{N-S} \sigma = \text{gr}(f) \cdot \int_N \sigma, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

## 5 Classificação homotópica de aplicações $f: M^n \rightarrow S^n$ . ( $M^n$ orientável)

Neste parágrafo, consideraremos uma variedade diferenciável compacta orientada e conexa  $M^n$ , e mostraremos que o conjunto  $[M^n, S^n]$  das classes de homotopia das aplicações contínuas  $f: M^n \rightarrow S^n$  está em correspondência biunívoca com o conjunto dos números inteiros, sendo essa correspondência estabelecida por intermédio do conceito de grau.

No teorema abaixo,  $M$  não precisa ser conexa. Na realidade este teorema é válido mais geralmente, (para aplicações próprias e homotopias próprias) sem a hipótese restritiva de compacidade, que usaremos. Entretanto, o caso compacto é de demonstração mais simples e, além disso, o teorema completo de classificação só é válido quando  $M$  é compacta. Uma demonstração do Teorema 7 deduz-se, também, do Teorema 5 do Capítulo III (vide Corolário 1).

**Teorema 7.** *Sejam  $M^n, N^n$  variedades compactas orientadas, sendo  $N$  conexa. Se duas aplicações diferenciáveis  $f, g: M \rightarrow N$  são homotópicas, então  $\text{gr}(f) = \text{gr}(g)$ .*

**Demonstração:** Introduzamos uma métrica riemanniana em  $N$ , cujo elemento de volume indicaremos por  $\sigma$ . Dada a homotopia  $F: M \times I \rightarrow N$  entre  $f$  e  $g$  (a qual, pelos resultados do §2, podemos supor diferenciável), chamemos de  $f_t: M \rightarrow N$  a aplicação definida por  $p \rightarrow F(p, t)$ , para

cada  $t \in I$  fixo. Se  $c = \int_M \sigma$  é o volume de  $N$ , temos  $\text{gr}(f_t) = \frac{1}{c} \int_M f_t * \sigma$ . Como  $\text{gr}(f_t)$  é um inteiro, para todo  $t \in I$ , para mostrarmos que  $\text{gr}(f) = \text{gr}(g)$ , ou seja, que  $\text{gr}(f_0) = \text{gr}(f_1)$ , basta provarmos que a função real  $\varphi: \rightarrow \int_M f_t * \sigma$  é contínua em  $I$ . Vamos então mostrar que  $\varphi$  é contínua. Primeiramente notemos que, se

$$f_t * \sigma = a(p, t) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

é a expressão da forma  $f_t * \sigma$  em relação a um sistema de coordenadas positivo  $x: U \rightarrow R^n$ , de  $M$ , então a função  $z: U \times I \rightarrow R$  é contínua. Com efeito, dado um par  $(p_0, t_0) \in U \times I$ , tomemos um sistema de coordenadas positivo  $y: W \rightarrow R^n$  em  $M$ , de modo que  $F(p_0, t_0) \in W$ , e vizinhanças  $v \ni p_0$  em  $M$ ,  $H \ni t_0$  em  $I$ , com  $V \subset U$  e  $F(V \times H) \subset W$ . Se a forma  $\sigma$  admite a expressão  $\sigma = b(q) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$  relativamente ao sistema  $y$ , a função  $b: W \rightarrow R$  é contínua. Ora, sabemos que

$$a(p, t) = \det \left( \frac{\partial y^i(x(p), t)}{\partial x^j} \right) b(f(p)), \quad p \in V, t \in H,$$

onde  $(x^1, \dots, x^n) \rightarrow (y^1(x, t), \dots, y^n(x, t))$  é a expressão da aplicação  $f_t$  dada pelos sistemas de coordenadas  $x$  e  $y$ . É claro que cada  $y^i(x, t)$  é uma função diferenciável das coordenadas de  $x$  e de  $t$ . Logo o determinante acima também o é. Assim,  $a(p, t)$  é contínua na vizinhança  $V \times H$  do ponto arbitrário  $(p_0, t_0) \in U \times I$ .

Em seguida, tomemos uma cobertura finita  $\{U_1, \dots, U_r\}$  de  $M$  por domínios de sistemas de coordenadas positivos

$x_\alpha: U_\alpha \rightarrow R^n$ , tais que cada  $U_\alpha$  é compacto e cada  $x_\alpha(U_\alpha)$  é limitado em  $R^n$ . Em relação a cada um desses sistemas, temos

$$f_t * \sigma = a_\alpha(p, t) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n, \quad (1)$$

com  $a_\alpha: U_\alpha \times I \rightarrow R$  contínua. Podemos obter uma nova cobertura  $\{V_1, \dots, V_r\}$  tal que  $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$  (sendo  $\bar{V}_\alpha$ , naturalmente, compacto). A forma  $f_t * \sigma$  admite ainda a expressão (1), porém agora com a vantagem de que  $a_\alpha: V_\alpha \times I \rightarrow R$  é uniformemente contínua. Como  $\alpha$  percorre um conjunto finito, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|t - t'| < \delta$  implica  $|a_\alpha(p, t) - a_\alpha(p, t')| < \varepsilon/A \cdot r$ , para todo  $\alpha = 1, \dots, r$ , e todo  $p \in V_\alpha$ , onde  $A = \max\{\text{vol}|x_\alpha(V_\alpha)|; \alpha = 1, \dots, r\}$ . Seja  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$  uma partição da unidade subordinada à cobertura  $\{V_\alpha\}$ . Se  $|t - t'| < \delta$ , então

$$\begin{aligned} & \left| \int f_t * \sigma - \int f_{t'} * \sigma \right| = \\ & = \left| \sum_\alpha \int \varphi_\alpha(p) ((a_\alpha(p, t) - a_\alpha(p, t')) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n) \right| \\ & \leq \sum_\alpha \int \varphi_\alpha(p) |a_\alpha(p, t) - a_\alpha(p, t')| dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n \\ & \leq \sum_{\alpha=1}^r \frac{\varepsilon}{A \cdot r} \text{vol}(x_\alpha(V_\alpha)) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

o que demonstra a continuidade de  $\varphi$  e portanto o teorema também.

### Aplicações do Teorema 7:

1. *Definição de grau de uma aplicação contínua.* Seja,  $M^n$ ,  $N^n$  variedades compactas, orientadas, sendo  $N$  conexa. Dada uma aplicação contínua  $f: M \rightarrow N$ , o grau de



$f$  é definido do seguinte modo: como sabemos, existe uma aplicação diferenciável  $g: M \rightarrow N$ , homotópica a  $f$  (Teorema 1, §2). Podemos então  $\text{gr}(f) = \text{gr}(g)$ , por definição. O Teorema 7 mostra que  $\text{gr}(f)$ , assim definido, não depende da aplicação diferenciável  $g$  escolhida. Com efeito, feita outra escolha  $g' \simeq f$ , teremos, por transitividade,  $g' \simeq g$ , donde  $\text{gr}(g') = \text{gr}(g)$ . Notemos que, se  $f$  não for sobre  $N$ , podemos tomar  $g$  suficientemente próxima de  $f$  para que  $g$  também não seja sobre  $N$ , e portanto  $\text{gr}(f) = \text{gr}(g) = 0$ .

2. *Se uma aplicação contínua  $f: S^n \rightarrow S^n$  não possui pontos fixos, então  $\text{gr}(f) = (-1)^{n+1}$ .*

Com efeito, como  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in S^n$ , o segmento de reta que liga  $-x$  a  $f(x)$  não passa pela origem de  $R^{n+1}$  e portanto a aplicação  $F: S^n \times I \rightarrow S^n$ , definida por

$$F(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + tx}{|(1-t)f(x) - tx|},$$

é contínua e é uma homotopia entre  $f$  e a aplicação antípoda  $x \rightarrow -x$ . Como já vimos, esta possui grau  $(-1)^{n+1}$ , donde  $\text{gr}(f) = (-1)^{n+1}$ . De modo inteiramente análogo, mostra-se que se  $g: S^n \rightarrow S^n$  é tal que, para todo  $x \in S^n$ , o ponto  $g(x)$  não é o antípoda de  $x$ , então  $g$  é homotópica à identidade, donde  $\text{gr}(g) = 1$ .

3. *Teorema fundamental da Álgebra.* Considere-mos a esfera  $S^2$  como a compactificação de Alexandroff do plano  $R^2$ :  $S^2 = R^2 \cup \{\infty\}$  mediante a projeção estereográfica que identifica  $R^2$  com  $S^2 - \{\infty\}$ . Interpretemos  $R^2$  com o conjunto dos números complexos, e considere-mos um polinômio  $f: R^2 \rightarrow R^2$ ,  $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ , de grau  $n > 0$  ( $a_0 \neq 0$ ). Como  $f$  é uma

aplicação própria (  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ , como se sabe ), a extensão  $\dot{f}: S^2 \rightarrow S^2$ , definida por  $\dot{f}(\infty) = \infty$ ,  $\dot{f}(z) = f(z)$ , se  $z \in R^2$ , é contínua. (Na realidade,  $\dot{f}$  é diferenciável, como se mostra facilmente). Se provarmos que o grau de  $\dot{f}$  é igual a  $n$ , concluiremos que  $\dot{f}$  é sobre  $S^2$ , daí, que  $f: R^2 \rightarrow R^2$  é sobre  $R^2$ , donde existirá algum  $z \in R^2$  tal que  $f(z) = 0$ . Assim, o teorema fundamental da Álgebra é uma conseqüência do fato de que  $\text{gr}(\dot{f}) = n$ . Para calcular o grau de  $\dot{f}$ , observemos primeiramente que o fato de todo número complexo não nulo ter  $n$  raízes  $n$ -ésimas implica imediatamente que  $\text{gr}(\dot{g}) = n$ , onde  $\dot{g}: S^2 \rightarrow S^2$  é a aplicação definida por  $\dot{g}(\infty) = \infty$ ,  $\dot{g}(z) = a_0 z^n$ , se  $z \in R^2$ . Por outro lado, tem-se  $f = \dot{f}$ , como demonstraremos agora. Com efeito, seja  $F: S^2 \times I \rightarrow S^2$  a aplicação definida por  $F(\infty, t) = \infty$ , seja qual for  $t \in I$  e, se  $z \in R^2$ ,

$$F(z, t) = a_0 z^n + (1 - t)[a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n].$$

É claro que  $F(x, 0) = \dot{f}(x)$  e  $F(x, 1) = \dot{g}(x)$ , para todo  $x \in \dot{S}^2$ , de modo que resta apenas mostrar que  $F$  é contínua. Tal continuidade é óbvia em  $R^2 \times I$ . Assim sendo, basta provar que  $F(z, t) \rightarrow \infty$  quando  $z \rightarrow \infty$  e  $t \rightarrow t_0 \in I$ . Na realidade, mostraremos mais: dado  $A > 0$ , existe  $B > 0$  tal que  $|F(z, t)| > A$  sempre que  $|z| > B$ , seja qual for  $t \in I$ . Dado  $A$ , escrevamos  $C = |a_1| + \cdots + |a_n|$  e tomemos  $B = \max\{(A + C)/|a_0|, 1\}$ . Então,  $|z| > B$  implica

$$\begin{aligned} |F(z, t)| &\geq |a_0|B^n - (|a_1|B^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}|B + |a_n|) \\ &\geq |a_0|B^n - CB^{n-1} \geq |a_0|B - C \geq A, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

4. *Sejam  $N^n$  uma variedade compacta, conexa, orientada e  $B^{n+1} = \{x \in R^{n+1}; |x| \leq 1\}$  a bola unitária. Se uma aplicação contínua  $f: S^n \rightarrow N^n$  admite uma extensão contínua  $\bar{f}: B^{n+1} \rightarrow N^n$ , então  $\text{gr}(f) = 0$ .*

Com efeito, pela Proposição 1, §1,  $f$  é homotópica a uma aplicação constante  $S^n \rightarrow c$ ,  $c \in N^n$ , donde o grau de  $f$  é igual ao de uma aplicação constante, isto é, zero.

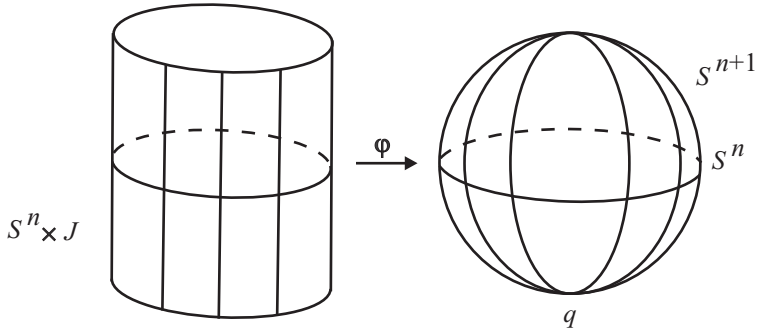
**Teorema de Brouwer.** *Toda aplicação contínua  $f: B^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$  possui um ponto fixo.*

Com efeito, suponhamos, por absurdo que  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in B^{n+1}$ . Então, podemos definir uma aplicação contínua  $\bar{g}: B^{n+1} \rightarrow S^n$  pondo, para todo  $x \in B^{n+1}$   $\bar{g}(x) = \frac{f(x)-x}{|f(x)-x|}$ . Pelo resultado anterior (4), a restrição  $g = \bar{g}|S^n: S^n \rightarrow S^n$  tem grau zero. Por outro lado a aplicação  $F: S^n \times I \rightarrow S^n$ , dada por  $F(x, t) = \frac{(1-t)f(x)-x}{|(1-t)f(x)-x|}$  é uma homotopia entre  $g$  e a aplicação antípoda  $x \rightarrow -x$ , donde o grau de  $g$  é  $(-1)^{n+1}$ . Esta contradição demonstrará o teorema, desde que mostremos que  $F$  está bem definida, ou seja, que o denominador  $|(1-t)f(x)-x|$  nunca se anula. Ora, para todo  $x \in S^n$ ,  $f(x) \in S^{n+1}$ ; donde  $|f(x)| \leq |x|$ . Se tivéssemos  $(1-t)f(x) = x$ , teria de ser  $t \neq 0$ , pois  $f$  não possui ponto fixo. Daí seguir-se-ia que  $|x| < |f(x)|$ , o que é absurdo.

5. *A suspensão de uma aplicação  $f: S^n \rightarrow S^n$ . A esfera  $S^n$  pode ser pensada como o “equador” da esfera  $S^{n+1}$ , isto é,  $S^n = \{x = (x^1, \dots, x^{n+1}, x^{n+2}) \in S^{n+1}; x^{n+2} = 0\}$ . Chamemos de  $J = [-1, +1]$  o intervalo fechado cujos extremos são  $-1$  e  $+1$ . A esfera  $S^{n+1}$  pode ser considerada, de modo natural, como o espaço quociente do produto  $S^n \times J$  pela relação de equivalência que consiste em identificar todos os pontos  $(x, -1)$ , como  $x \in S^n$ , ao “polo sul”*

$q = (0, \dots, 0, -1) \in S^{n+1}$  e todos os pontos da forma  $(x, 1)$  em  $S^n \times J$  ao “polo norte”  $p = (0, \dots, 0, 1)$  de  $S^{n+1}$ . Com efeito, a aplicação  $\varphi: S^n \times J \rightarrow S^{n+1}$ , definida por

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) &= (\sqrt{1-t^2} \cdot x^1, \dots, \sqrt{1-t^2} \cdot x^{n+1}, t), \\ x &= (x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n,\end{aligned}$$



leva  $S^n \times (-1, +1)$  difeomorficamente sobre  $S^{n+1} - \{p, q\}$ , transformando cada conjunto  $S^n \times t$  difeomorficamente sobre o paralelo de  $S^{n+1}$  cuja última coordenada é constante, igual a  $t$ . Além disso,  $\varphi(x, -1) = q$  e  $\varphi(x, 1) = p$ , para todo  $x \in S^n$ . Em virtude desse fato, podemos indicar os pontos de  $S^{n+1}$  com a notação  $(x, t)$ , onde  $x \in S^n$  e  $t \in J$ , entendendo-se que, para todo  $x \in S^n$ , o símbolo  $(x, -1)$  indica sempre o polo sul  $q \in S^{n+1}$  e  $(x, 1)$  indica sempre o polo norte  $p$ . Analogamente, para definir uma aplicação contínua  $f: S^{n+1} \rightarrow X$ , (onde  $X$  é qualquer espaço topológico) basta definir uma função contínua  $f(x, t)$  de duas variáveis  $x \in S^n$  e  $t \in J$ , de tal modo que  $f(x, -1)$  e  $f(x, 1)$  sejam constantes em  $x$ .

As considerações acima encerram o fato de que a esfera  $S^{n+1}$  é a *suspensão* da esfera  $S^n$ . A cada aplicação

contínua  $f: S^n \rightarrow S^n$  corresponde, de modo bem definido, uma aplicação  $Sf: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ , chamada a suspensão de  $f$ , e caracterizada pela equação  $Sf(x, t) = (f(x), t)$ . A operação de suspensão  $f \rightarrow Sf$  goza de várias propriedades naturais. Por exemplo  $S(g \circ f) = Sg \circ Sf$  e, se  $f \simeq g$  então  $Sf \simeq Sg$ , como o leitor facilmente verificará. Entretanto,  $f$  pode ser diferenciável, sem que  $Sf$  o seja. Fora dos polos  $p$  e  $q$ ,  $Sf$  é diferenciável com  $f$  pois coincide, através do difeomorfismo  $\varphi: S^n \times (-1, +1) \rightarrow S^{n+1} - \{p, q\}$ , com  $f \times \text{id}$ , onde  $\text{id}: J \rightarrow J$  é a aplicação identidade. Mas, em geral,  $Sf$  não é diferenciável nos polos. (Basta considerar a aplicação  $F: S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $f(z) = z^2$ . Interpretando novamente  $S^2 = R^2 \cup \{\infty\}$  como a esfera de Riemann, os polos de  $S^2$  são 0 e  $\infty$ . Para  $z \neq 0, \infty$ , vê-se que  $Sf(z) = z^2/|z|$ , enquanto  $Sf(0) = 0$ . Esta aplicação  $Sf: R^2 \rightarrow R^2$  não é diferenciável no ponto 0, pois coincide, ao longo do eixo dos  $x$ , com a aplicação  $x \rightarrow |x|$ ). *Afirmamos que, dada  $f: S^n \rightarrow S^n$ ,  $\text{gr}(f) = \text{gr}(Sf)$ . Como  $f \simeq g \Rightarrow Sf \simeq Sg$ , podemos supor  $f$  diferenciável. Embora  $Sf$  não seja também diferenciável, introduziremos uma nova aplicação diferenciável  $S'f: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ , que poderemos chamar a suspensão diferenciável de  $f$ , definida do seguinte modo. Consideramos uma função  $\zeta: J \rightarrow J$  tal que:*

- (a)  $\zeta(t) = -1$  para  $t \leq 1/2$ ;
- (b)  $\zeta(t) = 1$  para  $t \geq 2$ ;
- (c)  $\zeta(0) = 0$  e  $\zeta'(0) > 0$ .

(Por exemplo, podemos tomar  $\zeta(t) = 2\gamma(t + \frac{1}{2}) - 1$ , onde  $\gamma$  é a função considerada no Lema 1, §2). Em seguida, definimos  $S'f: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$  pondo  $S'f(x, t) = (f(x), \zeta(t))$ . É claro que  $S'f$  é diferenciável fora dos polos. Além disso,

$S'f$  é constante numa vizinhança de cada polo, donde é também diferenciável nos polos. A aplicação diferenciável  $S'f: S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$  tem o mesmo grau que  $f: S^n \rightarrow S^n$ . Com efeito, no equador  $S^n$ ,  $S'f$  coincide com  $f$ , pois  $\zeta(0) = 0$ . Seja  $y \in S^n$  um valor regular de  $f$ . Então  $f^{-1}(y) = \{y_1, \dots, y_r\} = (S'f)^{-1}(y)$ , e cada  $y_i$  é também um ponto regular da aplicação  $S'f$  pois, fora dos polos,  $S'f = f \times \zeta: S^n \times (-1, t) \rightarrow S^n \times (-1, +1)$ , donde, no ponto  $y_i$ ,  $(S'f)_* = f_* \oplus \zeta_*$ , sendo  $\zeta_*$  calculada em  $t = 0$ . Mas temos  $\zeta'(0) > 0$ . Logo  $f_* \otimes \zeta_* = (S'f)_*$  é um isomorfismo positivo ou negativo, conforme  $f_*$  o seja. Para concluir a demonstração de que  $\text{gr}(f) = \text{gr}(Sf)$ , resta apenas mostrar que  $S'f = Sf$ . Isto porém é simples. Definimos a homotopia  $F: S^{n+1} \times I \rightarrow S^{n+1}$  pondo  $F(x, t; s) = (f(x), st + (1-s)\zeta(t))$ ,  $x \in S^{n+1}$ ,  $t \in J$ ,  $s \in I$ . Vê-se que  $F$  é uma homotopia entre  $S'f$  e  $Sf$ .

Pelo Exemplo 2, §2, dado qualquer inteiro  $k \in \mathbb{Z}$ , existe uma aplicação  $f: S^1 \rightarrow S^1$  com  $\text{gr}(f) = k$ . Pelo resultado acima, a suspensão  $Sf: S^2 \rightarrow S^2$  tem também grau  $k$ . Por suspensões repetidas, concluímos que, para cada  $n > 0$  e cada  $k \in \mathbb{Z}$ , existe uma aplicação  $g: S^n \rightarrow S^n$  com  $\text{gr}(g) = k$ .

**Teorema 8.** *Seja  $M^n$  uma variedade compacta, conexa e orientada, e seja  $S^n$  uma esfera de mesma dimensão que  $M$ . Se duas aplicações  $f, g: M^n \rightarrow S^n$  têm o mesmo grau, então  $f$  e  $g$  são homotópicas.*

Na demonstração do Teorema 8, desempenha um papel importante um tipo de aplicação de  $S^n$  em  $S^n$ , cuja existência estabeleceremos no lema abaixo.

**Lema 7.** *Seja  $S^n$  a esfera unitária  $n$ -dimensional e  $p \in S^n$  um ponto qualquer. Dada uma vizinhança  $v \ni p$  em  $S^n$ , existe uma aplicação diferenciável  $\lambda_V: S^n \rightarrow S^n$  com as seguintes propriedades:*

- (a)  $\lambda_V(g) = z$  numa certa vizinhança de  $p$ , contido em  $V$ .
- (b)  $\lambda_V(y) = q$  (= ponto antípoda de  $p$ ) para todo  $y \in S^n - V$ ;
- (c)  $\lambda_V \simeq$  identidade.

**Demonstração:** Mediante uma mudança de eixos em  $R^{n+1}$ , podemos supor que  $p$  é o polo norte, donde seu antípoda  $q$  é o polo sul de  $S^n$ . Representemos os pontos de  $S^n$  por pares  $(x, t)$ ,  $x \in S^{n-1}$ ,  $t \in J = [-1, +1]$ . Como  $V$  é uma vizinhança de  $p = (x, 1)$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $(x, t) \in V$  para todo  $t > 1 - 2\varepsilon$  em  $J$ . Seja  $W$  a vizinhança de  $p$  formada pelos pontos  $(x, t)$  com  $1 - \varepsilon < t \leq 1$ . A aplicação  $\lambda_V$  que construiremos reduzir-se-á a identidade em  $W$ . Consideremos uma aplicação diferenciável  $\alpha: J \rightarrow J$  tal que  $\alpha(t) = -1$  para  $t \leq 1 - 2\varepsilon$  e  $\alpha(t) = t$  para  $1 - \varepsilon \leq t \leq 1$ . (Para obter  $\alpha$ , basta tomar uma aplicação diferenciável  $\beta: R \rightarrow R$ , crescente, com  $\beta(0) = 0$  para  $t \leq 1 - 2\varepsilon$ ,  $\beta(t) = 1$  para  $t \geq 1 - \varepsilon$  e  $0 \leq \beta(t) \leq 1$  sempre. A construção de  $\beta$  é imediata. Em seguida, tome-se  $\alpha(t) = (1 + t)\beta(t) - 1$ ). Definamos então  $\lambda_V: S^n \rightarrow S^n$  pela regra:  $\lambda_V(x, t) = (x, \alpha(t))$ . As propriedades (a) e (b) são evidentes. Para ter uma homotopia  $F: S^n \times I \rightarrow S^n$  entre  $\lambda_V$  e a identidade, basta pôr:  $F(x, t; s) = (x, st + (1 - s)\alpha(t))$ ,  $s \in S^{n-1}$ ,  $t \in J$ ,  $s \in I$ .

Se os pontos  $a, b \in S^n$  não são antípodas, então  $(1 - t)a + tb \neq 0$  para todo  $t \in I$ . Neste caso, chamamos de *segmento geodésico* de extremos  $a$  e  $b$  ao conjunto  $\sigma_{ab}$  de todos os pontos  $\sigma_{ab}(t) = \frac{(1-t)a+tb}{|(1-t)a+tb|} \in S^n$ ,  $t \in I$ .

É claro que, para  $a$  e  $b$  não antípodas, o ponto  $\sigma_{ab}(t)$  depende diferenciavelmente de  $a, b \in S^n$  e  $t \in I$ .

Demonstraremos, em seguida, o Teorema 8 num caso especial:

**1º caso:** *Se existe  $p \in S^n$ , um valor regular de  $f$  e  $g$ , tal que  $f^{-1}(p) = g^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_r\}$  e  $f_* = g_*$  em cada  $p_i$ , então  $f \simeq g$ .*

**Demonstração:** Em cada  $p_i$ , por ser  $f_* = g_*$ , os difeomorfismos locais  $f$  e  $g$  coincidem a menos de um infinitésimo de 2ª ordem e daí segue-se, sem dificuldade que existe uma vizinhança  $V_i \ni p_i$  tal que, para todo  $x \in \overline{V}_i - p_i$ , os pontos  $f(x)$  e  $g(x)$  não são antípodas e o ponto  $p \in S^n$  não pertence ao segmento geodésico  $\sigma_{f(x)g(x)}$ . Sejam  $V = V_1 \cup \dots \cup V_2$  e  $\partial V = \overline{V} - V =$  fronteira de  $V$ . A reunião de todos os segmentos geodésicos  $\sigma_{f(x)g(x)}$  quando  $x \in \partial V$  é um subconjunto fechado de  $S^n$  (imagem do compacto  $\partial V \times I$  pela aplicação contínua  $(x, t) \rightarrow \sigma_{f(x)g(x)}(t)$  que não contém  $p$ ). Logo  $p$  possui uma vizinhança  $W$  tal que  $\sigma_{f(x)g(x)} \subset S^n - W$  para todo  $x \in \partial V$ . Consideremos a aplicação  $\lambda_W: S^n \rightarrow S^n$ , introduzida no Lema 7. Como  $\lambda_W =$  identidade, temos  $f = \lambda_W \cdot f$  e  $g = \lambda_W \cdot g$ . Definamos uma aplicação  $F: M \times I \rightarrow S^n$  pondo

$$F(x, t) = \begin{cases} \lambda_W(\sigma_{f(x)g(x)}(t)), & \text{se } x \in V \\ q(= \text{ponto antípoda de } p), & \text{se } x \in M - V. \end{cases}$$

Existe dúvida sobre a continuidade de  $F$  apenas nos pontos  $(x, t)$ , onde  $x \in \partial V$ . Num desses pontos,  $F(x, t) = q$ . Por outro lado, se  $x_n \rightarrow x$  e  $t_n \rightarrow t$  (basta considerar o caso em que todos os  $x_n$  estão em  $V$ ), temos  $\lim F(x_n, t_n) = \lim \lambda_W(\sigma_{f(x_n)g(x_n)}(t_n)) = \lambda_W(\sigma_{f(x)g(x)}(t)) = q$ , pois, sendo



$x \in \partial V$ , o segmento geodésico  $\sigma_{f(x)g(x)}$  está contido em  $S^n - W$ . Assim  $F$  é contínua. Ora, para todo  $x \in M$ ,  $F(x, 0) = \lambda_W(f(x))$  e  $F(x, 1) = \lambda_W(g(x))$ . Logo  $F$  é uma homotopia entre  $\lambda_w \cdot f$  e  $\lambda_W \cdot g$ . Temos então a cadeia de homotopias  $f \simeq \lambda_w \cdot f \simeq \lambda_W \cdot g \simeq g$ , o que demonstra 1º caso do Teorema 8.

Em seguida, passemos a um caso mais geral do que o 1º.

**2º caso.** Existe  $p \in S^n$ , valor regular de  $f$  e  $g$ , tal que  $f^{-1}(p) = g^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_r\}$  e, para cada  $i$ , o sinal de  $p_i$  em relação a  $f$  é o mesmo que em relação a  $g$ , então  $f \simeq g$ .

**Demonstração:** Sejam  $U_1, \dots, U_r$  vizinhanças disjuntas dos pontos  $p_1, \dots, p_r$  respectivamente, onde são válidos os sistemas de coordenadas positivos  $x_i: U_i \rightarrow R^n$ , com  $x_i(p_i) = 0$  e  $x_i(U_i) = R^n$ . Seja  $y: S^n - q \rightarrow R^n$  um sistema de coordenadas positivo com  $y(p) = 0$  e  $y(S^n - q) = R^n$ ,  $q =$  antípoda de  $p$ . (Por exemplo:  $y =$  projeção estereográfica). Para cada  $i$ , consideremos a transformação linear  $A_i: R^n \rightarrow R^n$  cuja matriz na base canônica de  $R^n$  é a matriz jacobiana de  $y \circ f \circ x_i^{-1}$  no ponto  $0 = x_i(p_i)$ , ou seja, a matriz jacobiana de  $f$  no ponto  $p_i$  relativamente aos sistemas  $x, y$ . Analogamente definimos as transformações lineares  $B_i$ , usando  $g$  em vez de  $f$ . Para cada  $i$ ,  $\det(A_i)$  e  $\det(B_i)$  têm o mesmo sinal. Seja  $W \ni p$  o hemisfério norte de  $S^n$ . Definimos as aplicações diferenciáveis  $h, k: M^n \rightarrow S^n$  pondo

$$\begin{aligned} h|_{U_i} &= \lambda_W y^{-1} \cdot A_i \cdot x_i, & h|(M - \cup U_i) &= \text{constante} = q. \\ k|_{U_i} &= \lambda_W y^{-1} \cdot B_i \cdot x_i, & k|(M - \cup U_i) &= \text{constante} = q. \end{aligned}$$

Temos  $h_* = f_*$  e  $k_* = g_*$  em cada ponto  $p_i$ . Logo, pelo 1º caso,  $f \simeq h$  e  $g \simeq k$ . Como, para cada  $i$ , as transformações

lineares  $A_i, B_i: R^n \rightarrow R^n$  pertencem à mesma componente conexa de  $GL(n, R)$ , existe uma curva contínua  $A_i(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , formada por transformações lineares invertíveis  $A_i(t)$ , com  $A_i(0) = A_i$ ,  $A_i(1) = B_i$ . Definamos uma homotopia  $F: M \times I \rightarrow S^n$  pondo  $F(a, t) = (\lambda_W \cdot y^{-1} \cdot A_i(t) \cdot x_i)(a)$  se  $a \in U_i$  e  $F(a, t) = q$ , se  $a \in M - \cup U_i$ .

É imediato que  $F: h \simeq k$ , donde concluímos que  $f \simeq g$ .

**3º caso.** *Se existe um ponto  $p \in S^n$ , valor regular de  $f$  e  $g$ , com  $f^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_r\}$  e  $g^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_r\}$  onde, para cada  $i = 1, \dots, r$ , o sinal de  $p_i$  em relação a  $f$  é igual ao de  $q_i$  em relação a  $g$ , então  $f \simeq g$ .*

**Demonstração:** Seja  $x: U \rightarrow R^n$  um sistema de coordenadas positivo em  $M$ , como  $p_1, q_1 \in U$  e  $g^{-1}(p) \cap \bar{U} = \{q_1\}$ . Podemos admitir que  $x(U) = B(3) =$  bola aberta de raio 3 em  $R^n$ , e que  $x(p_1) = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $x(q_1) = (-1, 0, \dots, 0)$ . Consideremos, então, uma homotopia  $H: B(3) \times I \rightarrow B(3)$ , com as seguintes propriedades:

- (i)  $H(x, 0) = x$ , para todo  $x \in B(3)$ ;
- (ii)  $H(x, t) = x$ , para todo  $t \in I$  e todo  $x \in B(3) = B(2)$ ;
- (iii) Para cada  $t \in I$ , a aplicação  $x \rightarrow H(x, t)$  é um difeomorfismo de  $B(3)$ ;
- (iv)  $H(x(p_1), 1) = x(q_1)$ .

Para obter  $H$ , pode-se proceder do seguinte modo. Tem-se uma função diferenciável  $\alpha: R \rightarrow R$  tal que  $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ ,  $\alpha(t) = 0$  para  $|t| \geq 2$ ,  $\alpha(t) = 1$  para  $|t| \leq 1$ . Em seguida, considera-se uma curva parametrizada diferenciável

$t \rightarrow \theta_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , formada por aplicações lineares ortogonais  $\theta_t: R^n \rightarrow R^n$ , tais que  $\theta_0 =$  identidade e  $\theta_1(x(p_1)) = x(q_1)$ . Por exemplo, podemos fazer

$$\begin{aligned} \theta_t(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n) \\ = (x^1 \cos \pi t - x^2 \operatorname{sen} \pi t, x^1 \operatorname{sen} \pi t, x^1 \operatorname{sen} \pi t \\ + x^2 \cos \pi t, x^3, \dots, x^n). \end{aligned}$$

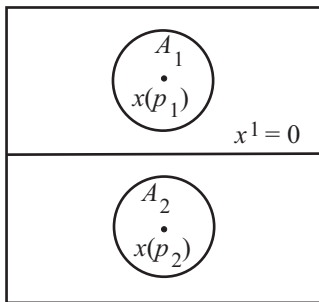
A homotopia  $H$  define-se então por  $H(y, t) = \theta(y, t \cdot \alpha(|y|))$  onde, por simplicidade, estamos escrevendo  $\theta(z, s)$  em vez de  $\theta_s(z)$ . As propriedades estipuladas para  $H$  são facilmente constatadas. Obtida  $H$ , definimos uma homotopia  $F: M \times I \rightarrow S^n$ , pondo  $F(a, t) = g(x^{-1}(H(x(a), t)))$  se  $a \in U$  e  $F(a, t) = g(a)$  se  $a \in M - U$ .  $F$  é uma homotopia entre  $g$  e uma aplicação  $h: M \rightarrow S^n$  que admite  $p$  como valor regular e  $h^{-1}(p) = \{p_1, q_2, \dots, q_r\}$ . Além disso, o sinal de  $p_1$  relativamente a  $h$  é o mesmo sinal de  $q_1$  relativamente a  $g$ , como resulta do fato de que a homotopia  $H$  define, em cada instante  $t$ , um difeomorfismo. Repetindo o argumento  $r$  vezes, obtemos uma aplicação diferenciável  $k: M^n \rightarrow S^n$ ,  $k \simeq g$ , com  $k^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_r\}$ , satisfazendo também as demais exigências do 2º caso, donde  $k \simeq f$ . Segue-se que  $f \simeq g$ .

Finalmente, a demonstração do Teorema 8 se completará com a demonstração do lema abaixo, juntamente com a observação de que, pelo Teorema de Sard, dadas duas aplicações diferenciáveis  $f, g: M^n \rightarrow S^n$ , existe sempre um ponto  $p \in S^n$  que é valor regular de  $f$  e  $g$  simultaneamente.

**Lema 8.** *Seja  $f: M^n \rightarrow S^n$  uma aplicação diferenciável. Dado um valor regular  $p \in S^n$ , existe uma aplicação diferenciável  $k: M^n \rightarrow S^n$ , homotópica a  $f$ , admitindo ainda*

$p$  como valor regular, e tal que em  $k^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_r\}$  todos os pontos  $p_i$  têm o mesmo sinal.

**Demonstração:** Basta provar que, se  $f^{-1}(p) = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$  onde  $p_1 > 0$  e  $p_2 < 0$ , então existe  $k$  homotópica a  $f$ , admitindo ainda  $p$  como valor regular, tal que  $k^{-1}(p) = \{p_3, \dots, p_r\}$ . Repetição deste argumento demonstrará o Lema 8. Seja  $x: U \rightarrow R^n$  um sistema de coordenadas positivo em  $M$ , tal que  $p_1, p_2 \in U$  e  $\bar{U}$  não contém outros pontos de  $f^{-1}(p)$ . Além disso, tomaremos  $U$  de modo que  $x(U) = R^n$  e os pontos  $x(p_1), x(p_2)$  sejam simétricos relativamente ao hiperplano  $x^1 = 0$  em  $R^n$ . Sejam  $A_1$  e  $A_2$  bolas em  $R^n$ , com centros em  $x(p_1)$  e  $x(p_2)$  respectivamente, com fechos disjuntos, e simétricas relativamente ao hiperplano  $x^1 = 0$ .



Seja  $y: S^n - q \rightarrow R^n$  um sistema de coordenadas positivo em  $S^n$ , com  $y(p) = 0$ ,  $y(S^n - q) = R^n$  (por exemplo: projeção estereográfica). Desejamos obter uma aplicação  $h: M^n \rightarrow S^n$ , homotópica a  $f$ , admitindo  $p$  como valor regular, com  $h^{-1}(p) = f^{-1}(p)$ , e tal que

(i)  $h \circ x^{-1}: R^n \rightarrow S^n$  toma valores iguais em dois pontos simétricos relativamente ao hiperplano  $x^1 = 0$ ;

(ii) Fora de  $A_1 \cup A_2$ ,  $h \cdot x^{-1}$  é constante, igual a  $q$ .

Para isto, consideremos as aplicações afins  $L_1, L_2: R^n \rightarrow R^n$  definidas por

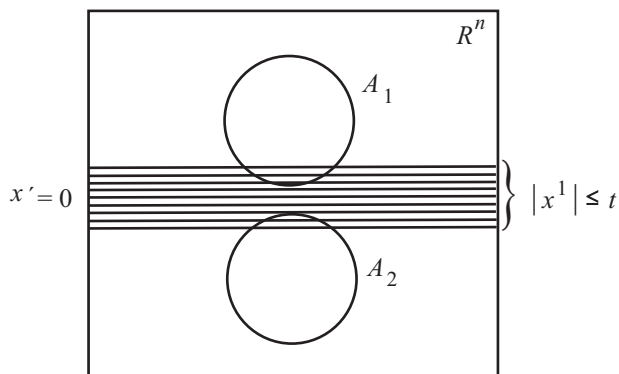
$$\begin{aligned} L_1(x^2, \dots, x^n) &= (x^1, \dots, x^n) - x(p_1), \\ L_2(x^1, \dots, x^n) &= (-x^1, x^2, \dots, x^n) - x(p_1). \end{aligned}$$

Note-se que  $L_1(x(p_1)) = L_2(x(p_2)) = 0$  e, se  $b^* \in R^n$  é o simétrico de  $b$  relativamente ao hiperplano  $x^1 = 0$ , então  $L_1(b) = L_2(b^*)$ . Definiremos  $h$  primeiramente em  $U$ . Seja  $V = y^{-1}(L_1(A_1)) = y^{-1}(L_2(A_2))$ . Poremos:  $h(a) = (\lambda_V \cdot y^{-1} \cdot L_1 \cdot x)(a)$  se  $a \in x^{-1}(A_1)$ ,  $h(a) = (\lambda_V \cdot y^{-1} \cdot L_2 \cdot x)(a)$ , se  $a \in x^{-1}(A_2)$  e  $h(a) = q$  se  $a \in U - [x^{-1}(A_1) \cup x^{-1}(A_2)]$ .

Para definir  $h$  em  $M - U$ , tomamos vizinhanças disjuntas  $U_i \ni p_i$  ( $i = 3, \dots, r$ ) com fechos contidos em  $M - U$ , nas quais são válidos os sistemas de coordenadas positivos  $x_i: U_i \rightarrow R^n$ , e como no 2º caso, pomos  $h|_{U_i} = \lambda_V \cdot y^{-1} \cdot L_i \cdot x$ , onde  $L_i$  é dada pela matriz jacobiana de  $f$  no ponto  $p_i$  ( $i = 3, \dots, r$ ). Pomos, também  $h(s) = q$  se  $a$  não pertence a  $U_i$  algum. Ficam assim cumpridas as exigências que fizemos sobre  $h$ , sendo a homotopia  $h \simeq f$  garantida pelo 2º caso. (Note-se que  $\det(L_1) > 0$  e  $\det(L_2) < 0$ ).

Para concluir, devemos definir uma homotopia  $F: M \times I \rightarrow S^n$  entre  $h$  e uma aplicação diferenciável  $k$  que tem as propriedades desejadas. A finalidade dessa homotopia será, como sabemos, a de eliminar os pontos  $p_1$  e  $p_2$  da imagem inversa  $h^{-1}(p)$ . ( $F$  será contínua, naturalmente, mas não será diferenciável em todos os pontos). Basta definir uma homotopia  $H: R^n \times I \rightarrow S^n$  entre a aplicação  $h \circ x^{-1}$  e a aplicação constante  $R^n \rightarrow q \in S^n$ , de tal modo que  $H(z, t) = q$  para todo  $t \in I$  e todo  $z$  fora de um certo compacto  $K \subset R^n$ . A homotopia  $F: M \times I \rightarrow S^n$  será

então definida pondo-se  $F(a, t) = H(x(a), t)$  se  $a \in U$  e  $F(a, t) = h(a)$  se  $a \in M - U$ . Para obter  $H$  faremos uso essencial do fato de  $h \circ x^{-1}$  assumir valores iguais em dois pontos simétricos em relação ao hiperplano  $x^1 = 0$ , e ser constante, igual a  $q$ , fora de qualquer compacto  $K$ , desde que  $K \supset A_1 \cup A_2$ . Por simplicidade, suporemos que  $A_1$  e  $A_2$  estão contidas na faixa  $|x^1| \leq 1$  do espaço  $R^n$ .



Poremos então

$$H(x^1, \dots, x^n; t) = \begin{cases} h \circ x^{-1}(t, x^2, \dots, x^n), & \text{se } |x^1| \leq t \\ h \circ x^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^n), & \text{se } |x^1| \geq t \end{cases}$$

Isto define uma aplicação contínua  $H: R^n \times I \rightarrow S^n$ . (No instante  $t$ ,  $H$  transforma de igual maneira cada hiperplano  $x^1 = c$ , com  $|c| \leq t$ ).  $H$  é precisamente a homotopia que procurávamos.

**Observação:** As demonstrações que demos do “3º caso” e do Lema 8 valem somente quando  $n > 1$ . Para  $n = 1$  seriam necessários pequenos cuidados adicionais que o leitor facilmente encontrará.

**Teorema 9.** *Seja  $M^n$  uma variedade compacta, conexa e orientada e  $S^n$  a esfera unitária de mesma dimensão. A correspondência que associa a cada aplicação contínua  $f: M^n \rightarrow S^n$  o inteiro  $\text{gr}(f)$  induz uma correspondência biunívoca  $[M^n, S^n] \approx \mathbb{Z}$  entre o conjunto  $[M^n, S^n]$ , das classes de homotopia de aplicações contínuas de  $M^n$  em  $S^n$ , e o conjunto  $\mathbb{Z}$  dos inteiros.*

**Demonstração:** Em virtude dos Teoremas 7 e 8, a correspondência que associa a cada classe de homotopia  $[f] \in [M^n, S^n]$  o grau  $\text{gr}(f) \in \mathbb{Z}$  de alguma aplicação  $f \in [f]$  é bem definida e biunívoca. Resta apenas mostrar que todo inteiro  $k \in \mathbb{Z}$  é o grau de alguma aplicação  $f: M^n \rightarrow S^n$ . Para isto, tomemos o polo norte  $p \in S^n$  e a projeção estereográfica  $y: S^n - q \rightarrow R^n$  correspondente. Seja  $W \ni p$  o hemisfério norte de  $S^n$  e  $\lambda_W: S^n \rightarrow S^n$  uma aplicação diferenciável como no Lema 7. Em seguida, consideremos  $k$  pontos  $p_1, \dots, p_k \in M$  e sistemas de coordenadas  $x_i: U_i \rightarrow R^n$  (todos  $> 0$  se  $k > 0$ , e todos negativos se  $k < 0$ ),  $x_i(U_i) = R^n$ , e tendo os  $U_i$  fechados disjuntos ( $i = 1, \dots, k$ ). Depois disso, definamos uma aplicação diferenciável  $f: M^n \rightarrow S^n$ , pondo  $f(a) = (\lambda_W \cdot y^{-1} \cdot x_i)(a)$  se  $a \in U_i$ , e  $f(a) = q$  se  $a \in M - \cup U_i$ . É evidente que  $\text{gr}(f) = k$ .

**Corolário.** *Uma aplicação contínua  $f: S^n \rightarrow S^n$  estende-se continuamente a  $\bar{f}: B^{n+1} \rightarrow S^n$  (onde  $B^{n+1} \subset R^{n+1}$  é a bola unitária) se, e somente se,  $\text{gr}(f) = 0$ .*

Com efeito, se  $\bar{f}$  existe, já vimos que  $\text{gr}(f) = 0$  (cfr. a 4ª “aplicação do Teorema 7”, no §5). Reciprocamente, se  $\text{gr}(f) = 0$ , então, pelo Teorema 9,  $f$  é homotópica a uma aplicação constante, donde admite uma extensão

$\bar{f}: B^{n+1} \rightarrow S^n$ , em virtude da Proposição 1, §1.

## 6 Variedades não orientáveis

Consideraremos aqui o problema da classificação homotópica das aplicações contínuas  $f: M^n \rightarrow S^n$ , quando  $M^n$  é compacta, conexa e não-orientável.

Inicialmente, dada uma aplicação diferenciável própria  $f: M^n \rightarrow N^n$  (onde as variedades em questão podem ser orientáveis ou não), e um valor regular  $p \in N$ , definiremos o grau módulo 2 de  $f$  relativamente ao ponto  $p$  como sendo  $\text{gr}_p(f) = 0 \pmod{2}$  se o número  $r$  de pontos em  $f^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_r\}$  for par, e  $\text{gr}_p(f) = 1 \pmod{2}$  se  $f^{-1}(p)$  possuir um número ímpar de pontos.

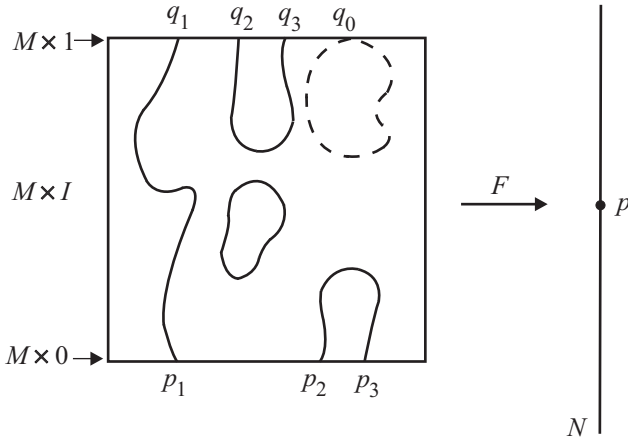
Dada a definição acima, deve-se demonstrar que, se  $N$  for conexa, o grau módulo 2 de uma aplicação própria  $f: M^n \rightarrow N^n$  é o mesmo em relação a todos os valores regulares  $p \in N$ . Para isto, estabeleceremos o teorema a seguir.

**Teorema 10.** *Seja  $F: M^n \times I \rightarrow N^n$  uma aplicação diferenciável própria, que é uma homotopia entre as aplicações (diferenciáveis, próprias)  $f, g: M^n \rightarrow N^n$ . Se  $p \in N$  é um valor regular de  $f$  e  $g$ , então  $\text{gr}_p(f) = \text{gr}_p(g) \pmod{2}$ .*

**Demonstração:** Pelo Lema 4, existe uma vizinhança  $V \ni p$ , formada somente de valores regulares de  $f$  e  $g$ , tal que  $\text{gr}_p(f) = \text{gr}_q(f)$  e  $\text{gr}_p(g) = \text{gr}_q(g) \pmod{2}$  para todo  $q \in V$ . Pelo Teorema de Sard, existe um ponto  $q \in V$ , o qual é valor regular de  $f$ ,  $g$  e  $F$ . Logo, não constitui perda de generalidade supor que o ponto  $p$  do enunciado é também um valor regular de  $F$ . Então  $F^{-1}(p)$  é uma subvariedade



(compacta) de dimensão 1 em  $M \times I$ , a qual consta de um número finito de componentes conexas, homeomorfas a círculos ou a intervalos fechados.



Um círculo  $C$ , contido em  $F^{-1}(p)$ , não pode tocar o bordo  $\partial(M \times I) = (M \times 0) \cup (M \times 1)$ . Com efeito, suponhamos que exista  $q_0 \in C \cap (M \times 1)$ . Seja  $v$  um vetor  $\neq 0$ , tangente a  $C$  no ponto  $q_0$ . Então  $v$  é tangente a  $M \times I$  no mesmo ponto. Como  $F|(M \times 1) = g$ , e  $q_0 \in g^{-1}(p)$ ,  $p =$  valor regular de  $g$ , temos  $F_*(v) \neq 0$ . Por outro lado, sendo  $F$  constante ao longo de  $C$ ,  $F_*(v) = 0$ . Esta contradição mostra que os círculos contidos em  $F^{-1}(p)$  não tocam o bordo  $\partial(M \times I)$ . Concentraremos nossa atenção nas componentes conexas de  $F^{-1}(p)$  que são homeomorfas a intervalos compactos da reta. As extremidades de cada uma dessas componentes estão em  $\partial(M \times I)$ . Com efeito, se  $G = F|(M \times I - \partial(M \times I))$ , então  $G$  é uma aplicação entre variedades sem bordo, donde  $G^{-1}(p) = F^{-1}(p) \cap (M \times I - \partial(M \times I))$  é uma variedade de dimensão 1, sem bordo. Logo, os pontos

de  $F^{-1}(p)$  fora de  $\partial(M \times I)$  não podem ser extremos de  $F^{-1}(p)$ . Como  $f^{-1}(p) = F^{-1}(p) \cap (M \times 0)$  e  $g^{-1}(p) = F^{-1}(p) \cap (M \times 1)$ , segue-se que os segmentos compactos de  $F^{-1}(p)$ , ou ligam um ponto de  $f^{-1}(p)$  a um de  $g^{-1}(p)$ , ou ligam dois pontos de  $f^{-1}(p)$ , ou dois pontos de  $g^{-1}(p)$ . Todos os pontos de  $f^{-1}(p)$  e  $g^{-1}(p)$  são extremidades em tais segmentos, o que basta para demonstrar o teorema. (Vide figura).

**Corolário.** *Seja  $f: M^n \rightarrow N^n$  uma aplicação própria, com  $N$  conexa. Dados dois valores regulares  $p, q \in N$  quaisquer, tem-se  $\text{gr}_p(f) = \text{gr}_q(f) \pmod{2}$ .*

**Demonstração:** A demonstração do “3º caso” do Teorema 8 nos fornece uma homotopia  $F: N \times I \rightarrow N$  tal que  $F(x, 0) = x$  para todo  $x \in N$ ,  $F(x, 1) = g(x)$ , onde  $g: N \rightarrow N$  é um difeomorfismo tal que  $g(q) = p$ , e, além disso, para cada  $t \in I$  fixo, a aplicação  $x \rightarrow F(x, t)$  é um difeomorfismo de  $N$ . Então a aplicação  $F \cdot f: M \times I \rightarrow N$  é própria e é uma homotopia entre  $f$  e  $g \cdot f$ . Segue-se imediatamente das propriedades de  $F$  que  $p$  é um valor regular de  $f$  e de  $g \cdot f$ . Logo, pelo Teorema 10,  $\text{gr}_p(f) = \text{gr}_p(g \circ f)$ . Mas  $(g \circ f)^{-1}(p) = f^{-1}(g^{-1}(p)) = f^{-1}(q)$ . Assim  $\text{gr}_p(g \circ f) = \text{gr}_p(f)$ , donde  $\text{gr}_p(f) = \text{gr}_p(f)$ .

**Observação:** Se as variedades  $M$  e  $N$  fossem orientáveis, poderíamos, na demonstração do Corolário acima, argumentar que a homotopia  $F$  fornece uma família contínua a um parâmetro de difeomorfismos de  $N$ , começando com a identidade e terminando com  $g$ . Por conseguinte, o sinal de cada ponto em  $f^{-1}(g)$  seria o mesmo, quer relativamente a  $f$  quer relativamente a  $g \cdot f$ . Ter-se-ia então, ainda,

$\text{gr}_p(g \circ f) = \text{gr}_p(f)$  e  $\text{gr}_p(f) = \text{gr}_q(f)$ . Evidentemente, esta observação não faz muito sentido agora, mas será utilizada na demonstração do Corolário 2 do Teorema 5, Capítulo III.

Dadas duas variedades  $M^n, N^n$ , sendo  $N$  conexa, dividiremos as aplicações diferenciáveis próprias  $f: M^n \rightarrow N^n$  em duas classes. Diremos que  $f$  é *par* se o seu grau módulo 2 é igual a zero, isto é, se para algum (donde para todo) valor regular  $p \in N$ ,  $f^{-1}(p)$  tem um número par de pontos. Diremos que  $f$  é *ímpar* se, pelo contrário, o grau módulo 2 de  $f$  é igual a 1, ou seja,  $f^{-1}(p)$  contém um número ímpar de pontos, qualquer que seja o valor regular  $p \in N$ .

Continuando, devemos demonstrar que, quando  $M^n$  é compacta, conexa e não orientável, e  $S^n$  é a esfera, vale a recíproca do Teorema 10. Pela primeira vez neste parágrafo, é essencial aqui a não-orientabilidade de  $M$ .

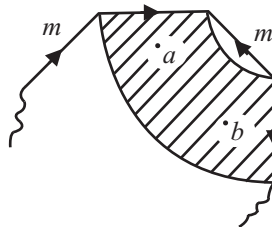
**Teorema 11.** *Seja  $M^n$  uma variedade compacta, conexa e não orientável. Duas aplicações  $f, g: M^n \rightarrow S^n$ , que são ambas pares ou ambas ímpares, são homotópicas.*

A demonstração do Teorema 11 se baseia em argumentos análogos aos já usados para demonstrar o Teorema 8. O único fato novo e, de resto, essencial é o lema a seguir. Antes de enunciá-lo, daremos uma definição: Seja  $x: U \rightarrow R^n$  um sistema de coordenadas numa variedade diferenciável  $M$ , com  $U$  conexo. Dados  $a, b \in U$  e  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset N_a$ ,  $\{f_1, \dots, f_n\} \subset M_b$ , bases nesses espaços tangentes, diremos que estas bases são *coerentes* relativamente a  $x$  se, escrevendo-se  $e_j = \sum \alpha_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $f_j = \sum \beta_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , os determinantes  $\det(\alpha_j^i)$  e  $\det(\beta_j^i)$  têm o mesmo sinal. No caso contrário, diremos que as bases dadas são *incoerentes* relativamente

ao sistema  $x$ . Numa variedade orientável conexa, serem coerentes ou incoerentes é uma propriedade intrínseca do par de bases dado: não depende do sistema  $x$  escolhido. Já o oposto se dá numa variedade não orientável, como mostra o lema abaixo.

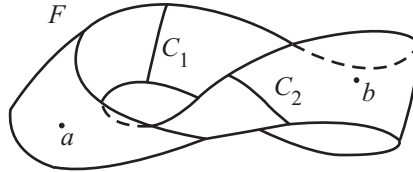
**Lema 9.** *Seja  $M^n$  uma variedade conexa, compacta, não orientável, dados  $a, b \in M$  e duas bases  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset M_a$ ,  $\{f_1, \dots, f_n\} \subset M_b$ , existem sistemas de coordenadas  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $y: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $a, b \in U$ ,  $a, b \in V$ ,  $x(U) = y(V) = \mathbb{R}^n$ , e tais que as bases dadas são coerentes em relação a  $x$  e incoerentes em relação a  $y$ .*

**Demonstração:** Variedades de dimensão 1 são orientáveis. Quando a dimensão  $n$  é igual a 2, sabe-se que  $M^2$  é obtida de um polígono convexo do plano mediante identificação conveniente de alguns pares de lados. (Vide [21], capítulo 6). Entre essas identificações, tendo em vista  $M^2$  ser não orientável, deverá haver uma que dará origem a uma faixa de Moebius  $F$  em  $M$ .



Como facilmente se constata, a faixa de Moebius  $F$  pode ser sempre obtida de modo a conter os pontos dados  $a$  e  $b$  em seu interior. (Pois a representação de  $M^2$  como espaço quociente de um polígono pode sempre ser

feita de modo que  $a$  e  $b$  provenham de pontos situados no interior do polígono).



Na faixa de Moebius  $F \subset M^2$ , para separar os pontos  $a$  e  $b$ , são necessários dois cortes  $C_1$  e  $C_2$ . Podemos tomar  $U = F - C_1$  e  $V = F - C_2$ , ou  $U = F - C_2$ ,  $V = F - C_1$ , conforme sejam as orientações das bases dadas em  $M_a$  e  $M_b$ . O Lema fica então facilmente demonstrado em dimensão 2.

Consideremos agora  $n > 2$ . Como  $M^n$  não é orientável, existe um caminho desorientador em  $M$ , começando e terminando em  $a$ . Trata-se de uma aplicação contínua  $\lambda: S^1 \rightarrow M^n$ , do círculo unitário  $S^1$  em  $M$ , tal que  $a \in \lambda(S^1)$ . Como  $M$  é conexa, podemos também admitir que  $b \in \lambda(S^1)$ . Sendo  $\dim M > 2 \dim S^1 + 1$ , podemos aproximar  $\lambda$  por uma imersão  $\mu: S^1 \rightarrow M$ . É claro que podemos ainda supor que  $a, b \in \mu(S^1)$ . Seja  $P^1 = \mu(S^1)$ . Consideremos uma vizinhança tubular  $T = T_\varepsilon(P)$  da subvariedade  $P$  em  $M$ , a qual é dotada de uma projeção  $\pi: T \rightarrow P$ . Sendo homeomorfa a um círculo, a subvariedade  $P$  é a reunião de dois segmentos abertos:  $P = A \cup B$ , de modo que  $a, b \in A$  e  $a, b \in B$ . Os abertos  $\pi^{-1}(A)$  e  $\pi^{-1}(B)$  em  $M$  são vizinhanças tubulares nos segmentos  $A$  e  $B$  respectivamente, e são portanto difeomorfos aos produtos  $A \times R^{n-1}$ ,  $B \times R^{n-1}$  ou seja, são ambos difeomorfos a  $R^n$ . Tentativamente, ponhamos  $U = \pi^{-1}(A)$ ,  $V = \pi^{-1}(B)$ , e sejam  $x: U \rightarrow R^n$ ,

$y: V \rightarrow R^n$  difeomorfismos. Se a imersão  $\mu: S^1 \rightarrow M$  for tomada suficientemente próxima de  $\lambda$ , então  $\mu \simeq \lambda$  e o caminho  $\mu$  será ainda desorientador. Então, ou as bases  $\{e_i\}$  e  $\{f_j\}$  são coerentes relativamente a  $x$  e incoerentes relativamente a  $u$ , ou vice-versa. No primeiro caso, manteremos a notação escolhida e, no segundo caso, trocaremos as denominação  $x \rightarrow y$ ,  $U \rightarrow V$ , para ficar de acordo com o enunciado do lema.

**Demonstração do Teorema 11:** Sejam  $p \in S^n$  um valor regular de  $f$  e  $g$ . Consideremos a aplicação  $f: M^n \rightarrow S^n$ . Seja  $f^{-1}(p) = \{p_1, \dots, p_r\}$ . Se  $r > 1$ , escolhemos bases  $\{e_1, \dots, e_n\}$  em  $M_{p_1}$  e  $\{f_1, \dots, f_n\}$  em  $M_{p_2}$  que são transformadas por  $f_*$  na mesma base de  $(S^n)_p$ . Usando o lema anterior, tomamos um sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$ , com  $x(U) = R^n$ ,  $p_1, p_2 \in U$ , de modo que as bases  $\{e_i\}$  e  $\{f_j\}$  sejam incoerentes relativamente a  $x$  e que  $\bar{U}$  não contenha outros pontos de  $f^{-1}(p)$  além de  $p_1$  e  $p_2$ . Tomando sempre como referência o sistema  $x$ , podemos dizer que  $p_1$  e  $p_2$  são pontos que têm sinais opostos relativamente a  $f$ . Pelo Lema 8, obtemos uma aplicação  $h: M^n \rightarrow S^n$ , homotópica a  $f$ , tal que  $p$  é ainda um valor regular de  $h$  e  $h^{-1}(p) = \{p_3, \dots, p_r\}$ . Se  $r$  (isto é,  $f$ ) é par, prosseguindo analogamente, chegaremos a obter uma aplicação  $k: M^n \rightarrow S^n$ ,  $k \simeq f$ , com  $k^{-1}(p) = \emptyset$ . Então  $k(M^n) \subset S^n - p$ , donde  $k \simeq$  constante e portanto  $f \simeq$  constante. Assim, se  $f$  e  $g$  são ambas pares, teremos  $f \simeq g$  pois serão ambas homotópicas a constantes. Mas se  $f$  e  $g$  são ímpares, aplicando repetidamente o processo de redução acima indicado, chegaremos a obter aplicações  $h, k: M^n \rightarrow S^n$ , com  $h \simeq f$ ,  $k \simeq g$ , ambas admitindo  $p$  como valor regular, e tais que  $h^{-1}(p) = p_0$ ,  $k^{-1}(p) = q_0$ . Novamente, tomamos

bases  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset M_{p_0}$  e  $\{f_1, \dots, f_n\} \subset M_{q_0}$ , tais que  $h_*(e_i) = k_*(f_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Pelo lema anterior, existe um sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$ , com  $p_0, q_0 \in U$ ,  $x(U) = R^n$ , tal que as bases dadas são coerentes relativamente a  $x$ . A técnica de demonstração do Teorema 8 se aplica então *ipsis literis* para concluirmos que  $h \simeq k$ , donde  $f \simeq g$ .

Dada uma aplicação contínua  $f: M^n \rightarrow N^n$  ( $N$  conexa), diremos que  $f$  é *par* se existe uma aplicação diferenciável  $g: M^n \rightarrow N^n$ , tal que  $g \simeq f$  e  $g$  é par. Pelo Teorema 10, se isto acontecer, então qualquer aplicação diferenciável  $h: M^n \rightarrow N^n$ , homotópica a  $f$ , será também par. Se, porém existir uma aplicação diferenciável  $k: M^n \rightarrow S^n$ , homotópica a  $f$  e ímpar, diremos que  $f$  é *ímpar*. Pelo Teorema 10, duas aplicações contínuas homotópicas são ambas pares ou ambas ímpares. Enunciaremos agora o teorema final que dá a classificação homotópica das aplicações contínuas  $f: M^n \rightarrow S^n$ ,  $M^n$  não orientável.

**Teorema 12.** *Seja  $M^n$  uma variedade compacta, conexa e não orientável. Existem precisamente duas classes de homotopia de aplicações contínuas  $f: M^n \rightarrow S^n$ : a classe das aplicações pares e a classe das aplicações ímpares.*

**Demonstração:** Tendo em vista os Teoremas 10 e 11, basta demonstrar que, para toda  $M^n$ , existe pelo menos uma aplicação par  $M^n \rightarrow S^n$  e uma aplicação ímpar. A primeira é evidente: basta tomar uma aplicação constante. Para obter uma aplicação ímpar, consideraremos um sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$  em  $M$ , com  $x(U) = R^n$ , uma projecção estereográfica  $y: S^n - q \rightarrow R^n$ , e uma aplicação  $\lambda_W: S^n \rightarrow S^n$  do tipo do Lema 7, com  $W =$

hemisfério de  $S^n$  contendo o ponto antípoda de  $q$ , pondo em seguida  $f = \lambda_W \circ y^{-1} \circ x$  em  $U$  e  $f(a) = q$  para todo  $a \in M - U$ .



# Capítulo III

## Campos Vetoriais

### 1 Generalidades e um teorema de Poincaré e Brouwer

Um *campo vetorial*  $v$ , sobre uma variedade diferenciável  $M^n$ , é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um vetor  $v_p \in M_p$ , tangente a  $M$  no ponto  $p$ . Dado um campo vetorial  $v$  sobre  $M$ , um sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$  em  $M$  permite escrever, para todo  $p \in U$ :

$$v_p = \sum_{i=1}^n \alpha^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p).$$

Assim, em cada sistema de coordenadas  $x$ , o campo  $v$  fica definido pelas  $n$  funções reais  $\alpha^i: U \rightarrow R$  que dão, em todo ponto  $p \in U$ , as  $n$  coordenadas de  $v_p$  relativamente a base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i}(p) \right\}$ . Diremos que o campo  $v$  é *contínuo*, ou *diferenciável*, quando, para todo sistema de coordenadas  $x$  em  $M$ , as funções  $\alpha^i$  forem contínuas, ou diferenciáveis.

Não nos interessarão campos que não sejam, pelo menos, contínuos.

De acordo com a versão clássica, um campo vetorial  $v$  pode também ser definido como uma correspondência que associa a cada sistema de coordenadas locais  $x: U \rightarrow R^n$ , admissível em  $M$ ,  $n$  funções reais  $\alpha^i: U \rightarrow R$  (as coordenadas do campo  $v$  no sistema  $x$ ) de tal modo que, se  $y: V \rightarrow R^n$  é outro sistema com  $U \cap V \neq \emptyset$ , então as funções  $\beta^i: V \rightarrow R^n$  determinadas pelo campo  $v$  e o sistema  $y$ , relacionam-se, com as  $\alpha^j$  do modo seguinte:

$$\beta^i(p) = \sum_{j=1}^n \alpha^j(p) \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(p) \quad (i = 1, \dots, n).$$

É claro que esta definição de campo vetorial equivale à que foi dada inicialmente. Se  $M^n$  é um subconjunto aberto de  $R^n$ , como existe aí um sistema de coordenadas canônico, um campo vetorial em  $M$  será simplesmente uma coleção de  $n$  funções reais  $\alpha^i: M \rightarrow R$ .

Seja  $v$  um campo vetorial sobre  $M$ . Uma *trajetória*, ou uma *curva integral* de  $v$  é uma curva parametrizada (pelo menos de classe  $C^1$ )  $\varphi: I \rightarrow M$ , definida num intervalo aberto  $I$  da reta, cujo vetor tangente em todo ponto  $p = \varphi(t)$  é igual ao vetor  $v_p$ , dado pelo campo. Se, relativamente a um sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$ , admissível em  $M$ , a curva parametrizada  $\varphi$  é definida por  $t \rightarrow (x^1(t), \dots, x^n(t))$  e o campo vetorial  $v$  é representado por  $n$  funções reais  $\alpha^i: U \rightarrow R$ , então a condição para que a curva  $\varphi$  seja uma trajetória de  $v$  se exprime por meio das equações

$$\frac{dx^i}{dt} = \alpha^i(x^1(t), \dots, x^n(t)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Segue-se, então, do teorema clássico de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias, que, dado um campo vetorial diferenciável sobre uma variedade  $M$  (classe  $C^1$  seria suficiente), por cada ponto  $p \in M$  passa uma e somente uma trajetória de origem  $p$ . (Diremos que a trajetória  $\varphi: I \rightarrow M$  tem *origem* em  $p$  se  $0 \in I$  e  $\varphi(0) = p$ ). Além disso, outro teorema básico sobre equações diferenciais afirma que “a solução de um sistema depende diferenciavelmente das condições iniciais”. Em termos mais precisos, isto significa o seguinte: se indicarmos com  $t \rightarrow \varphi(p, t)$  a trajetória de  $v$  que tem origem no ponto  $p$ , a qual se caracteriza pelas propriedades  $\varphi(p, 0) = p$  e  $\frac{d\varphi}{dt}(p, t) = v_{\varphi(p, t)}$ , então o ponto  $\varphi(p, t) \in M$  depende diferenciavelmente de  $p$  e de  $t$ .

Se a variedade  $M$  é *compacta*, então as trajetórias de um campo vetorial diferenciável  $v$  sobre  $M$  podem ser todas estendidas de modo a ficarem definidas na reta inteira. (Vide [7], pag. 33). Então obtemos uma aplicação diferenciável  $\varphi: M \times R \rightarrow M$  onde, para cada  $p \in M$  e cada  $t \in R$ ,  $\varphi(p, t)$  é o ponto de parâmetro  $t$  na trajetória de  $v$  que tem origem no ponto  $p$ . A aplicação  $\varphi: M \times R \rightarrow M$  define, para cada valor fixo de  $t \in R$ , uma “*translação*”  $\varphi_t: p \rightarrow \varphi(p, t)$  ao longo das trajetórias. As translações  $\varphi_t$  são difeomorfismos de  $M$ . Com efeito, tem-se evidentemente  $\varphi_0 =$  identidade e, como mostraremos já,  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ . Daí segue-se que  $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_s$  e que  $\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_{-t} =$  identidade, donde  $\varphi_t$  é um difeomorfismo, cujo inverso é  $\varphi_{-t}$ . A igualdade  $\varphi_{t+s} = \varphi_s \circ \varphi_t$  decorre imediatamente da unicidade da trajetória que tem origem num ponto. Ela significa que  $\varphi(p, t + s) = \varphi(\varphi(p, t), s)$ , ou seja, que o ponto de parâmetro  $s$  na trajetória de ori-

gem  $\varphi(p, t)$  é o mesmo que o ponto de parâmetro  $t + s$  na trajetória de origem  $p = \varphi(p, 0)$ . Para demonstrá-la, seja  $\gamma: R \rightarrow M$  a trajetória de origem  $p$  ( $\gamma(t) = \varphi(p, t)$ ). Dado  $t_0 \in R$  arbitrário, definamos  $\xi: R \rightarrow M$  pondo  $\xi(s) = \gamma(t_0 + s)$ . Devemos mostrar que  $\xi$  é a trajetória de origem  $\gamma(t_0)$ . Ora, temos  $\xi(0) = \gamma(t_0)$ . Além disso, para todo  $s_0 \in R$ , temos  $\frac{d\xi}{ds}(s_0) = \frac{d\gamma}{dt}(t_0 + s_0) = v_{\gamma(t_0 + s_0)} = v_{\xi(s_0)}$ . Pela unicidade,  $\xi$  é a trajetória de origem  $\gamma(t_0)$ .

Assim, todo campo vetorial diferenciável numa variedade compacta  $M$  dá origem a um grupo de difeomorfismos  $\{\varphi_t; t \in R\}$ , formado pelas translações ao longo das trajetórias. Este grupo é uma imagem homomórfica do grupo aditivo dos números reais, pela aplicação  $t \rightarrow \varphi_t$ .

Um ponto  $p \in M$  chama-se uma *singularidade* de um campo vetorial  $v$  sobre  $M$  quando  $v_p = 0$ .

Se  $p \in M$  é uma singularidade do campo diferenciável  $v$  sobre  $M$ , então  $\varphi_t(p) = p$ , qualquer que seja o difeomorfismo  $\varphi_t$  do grupo determinado por  $v$ . Com efeito, a trajetória de  $v$  que contém  $p$  reduz-se ao próprio ponto  $p$ . Reciprocamente, se  $p$  é um ponto fixo de todo difeomorfismo  $\varphi_t$  do campo determinado por  $v$ , então  $p$  é uma singularidade de  $v$ , pois  $v_p = \frac{d\varphi}{dt}(p, 0) = 0$ , já que a curva  $t \rightarrow \varphi(p, t)$  é constante.

Neste Capítulo, estaremos interessados em estudar as singularidades dos campos vetoriais sobre uma variedade compacta. O ponto de partida para este estudo foi o teorema clássico de Poincaré, segundo o qual todo campo vetorial contínuo sobre a esfera  $S^2$  admite pelo menos uma singularidade. Mais precisamente, Poincaré associou a cada singularidade isolada de um campo vetorial  $v$  sobre uma superfície compacta  $M^2$  um número, que ele chamou o *índice*

da singularidade. (Uma singularidade  $p$  diz-se *isolada* se existe uma vizinhança de  $p$  na qual o campo não possui outras singularidades). As singularidades de um campo contínuo constituem evidentemente um conjunto fechado. Assim, se um campo vetorial contínuo  $v$ , numa variedade compacta  $M$ , possui somente singularidades isoladas, estas são em número finito. Poincaré demonstrou o resultado bastante surpreendente, segundo o qual a soma dos índices das singularidades de um campo contínuo  $v$  sobre uma  $M^2$  compacta não depende do campo  $v$ . (Supondo que as singularidades são todas isoladas). Esta soma de índices é um número, chamado a *característica de Euler* da superfície  $M^2$ , indicado com  $\chi(M^2)$ . Na esfera,  $\chi(S^2) = 2$ , donde todo campo vetorial contínuo sobre  $S^2$  deve possuir, pelo menos, uma singularidade.

Generalizando o resultado de Poincaré, Brouwer demonstrou o teorema abaixo:

**Teorema 1.** *Existe um campo vetorial contínuo sem singularidades na esfera  $S^n$  se, e somente se,  $n$  é ímpar.*

**Demonstração:** Em primeiro lugar, se  $n = 2k - 1$  é um número ímpar, então  $S^n = \{p = (x^1, \dots, x^{2k}) \in R^{2k}: \sum x^i x^i = 1\}$  e, para cada ponto  $p = (x^1, \dots, x^{2k}) \in S^n$ , o vetor  $v_p = (-x^{k+1}, \dots, -x^{2k}, x^1, \dots, x^k) \in R^{2k}$  é tangente a  $S^n$  no ponto  $p$  pois é perpendicular ao raio  $p - 0$ . Assim, a correspondência  $p \rightarrow v_p$  define um campo vetorial contínuo (aliás diferenciável) sobre  $S^n$ , o qual não tem singularidades, pois  $|v_p| = 1$  para todo  $p \in S^n$ . Para demonstrar a recíproca, faremos uso dos dois lemas abaixo, cuja demonstração daremos logo mais adiante.

**Lema 1.** *Seja  $v$  um campo vetorial diferenciável sobre uma variedade compacta  $M^n$ , e indiquemos com  $\{\varphi_t; t \in R\}$  o grupo de difeomorfismos de  $M$  determinado por  $v$ . Se o campo  $v$  não possui singularidades, então existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varphi_t(p) \neq p$ , qualquer que seja  $p \in M$ , desde que  $0 < t < \varepsilon$ .*

**Lema 2.** *Se existe, sobre uma variedade  $M^n$ , um campo vetorial contínuo sem singularidades, então existe também um campo diferenciável sem singularidades.*

Admitidos estes lemas, suponhamos, por absurdo, que exista um campo vetorial contínuo sem singularidades sobre uma esfera  $S^n$ , cuja dimensão  $n$  é par. Pelo Lema 2, podemos supor que este é um campo diferenciável  $v$ . Tomando o número  $\varepsilon > 0$ , dado pelo Lema 1, e fixando  $t$ , com  $0 < t < \varepsilon$ , o difeomorfismo  $\varphi_t: S^n \rightarrow S^n$  não terá pontos fixos. Logo como vimos no Capítulo II (consequência do Teorema 7), o grau de  $\varphi_t$  será igual a  $(-1)^{n+1} = -1$ . Por outro lado, a aplicação  $F: S^n \times I \rightarrow S^n$ , dada por  $F(p \cdot s) = \varphi_{(1-s)t}(p)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , é uma homotopia entre  $\varphi_t$  e a aplicação identidade  $(-\varphi_0)$ . Logo, o grau de  $\varphi_t$  é igual a 1. Esta contradição demonstra o teorema.

Passemos agora a demonstrar os lemas admitidos.

### **Demonstração do Lema 1.**

Como  $M$  é compacta, basta demonstrar que, dado um ponto arbitrário  $p \in M$ , existem uma vizinhança  $V \ni p$  e um número  $\varepsilon(p) > 0$  tais que  $\varphi_t(q) \neq q$  para todo  $q \in V$  e  $0 < t < \varepsilon(p)$ . Trata-se, pois, de um problema local. Podemos então admitir que temos  $\varphi: R^n \times R \rightarrow R^n$  tal que  $\varphi(x, 0) = x$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) \neq 0$  para todo  $x \in R^n$ . Fixemos um valor particular  $x = p$ . Queremos obter uma vizinhança

$U \ni (p, 0)$  em  $R^n \times R$  tal que  $\varphi(x, t) \neq x$ , para todo  $(x, t) \in U$ , com  $t \neq 0$ . Isto será conseguido se mostrarmos que  $(x, t), (x, t') \in U$  e  $t \neq t'$  implicam  $\varphi(x, t) \neq \varphi(x, t')$ , pois já temos  $\varphi(x, 0) = x$ . Esta última identidade nos mostra que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(p, 0) = i$ -ésimo vetor da base canônica do espaço  $R^n$ . Alguma coordenada do vetor  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(p, 0)$  sendo  $\neq 0$ , podemos supor, para fixar as idéias, que tal coordenada é a primeira. Então os  $n$  vetores  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}(p, 0), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x^n}(p, 0), \frac{\partial \varphi}{\partial t}(p, 0)$  são linearmente independentes em  $R^n$ . Assim, se definirmos a aplicação  $H: R^n \times R \rightarrow R \times R^n$ , pondo  $H(x, t) = (x^1, \varphi(x, t))$ , a aplicação linear  $H_*$ , induzida no ponto  $(p, 0)$ , será um isomorfismo. Portanto, existirá uma vizinhança  $U \ni (p, 0)$  em  $R^n \times R$ , tal que a restrição  $H|U$  é um difeomorfismo. Esta é a  $U$  procurada pois se  $(x, t), (x, t') \in U$  e  $t \neq t'$ , então  $(x^1, \varphi(x, t)) = H(x, t) \neq H(x, t') = (x^1, \varphi(x, t'))$ , donde  $\varphi(x, t) \neq \varphi(x, t')$ .

O Lema 2 decorre imediatamente do teorema geral de aproximação de campos contínuos por campos diferenciáveis, o qual demonstraremos a seguir. Em primeiro lugar, digamos algumas palavras acerca de “aproximação” ou seja, da distância entre dois campos vetoriais.

Sejam  $M^n$  uma variedade compacta. Devemos introduzir uma topologia no conjunto dos campos vetoriais contínuos sobre  $M$ . Consideremos uma coleção finita de sistemas de coordenadas  $x_\alpha: V_\alpha \rightarrow R^n$ ,  $\alpha = 1, \dots, r$ , de modo que  $\bigcup_{\alpha=1}^r V_\alpha = M$ . Seja  $\{U_1, \dots, U_r\}$  uma cobertura de  $M$  por abertos tais que  $\bar{U}_0 \subset V_\alpha$ . Dado um campo vetorial contínuo  $v$  sobre  $M$ , a cada  $\alpha = 1, \dots, r$  correspondem  $n$  funções reais contínuas  $a_\alpha^1, \dots, a_\alpha^n: V_\alpha \rightarrow R$  tais que

$v_p = \sum_{i=1}^n a_\alpha^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ . As funções  $a_\alpha^i$  são limitadas no compacto  $\bar{U}_\alpha$ . Seja  $c_\alpha^i = \sup \{|a_\alpha^i(p)|; p \in \bar{U}_\alpha\}$  e ponhamos  $|v| = \max\{c_\alpha^1; \alpha = 1, \dots, r; i = 1, \dots, n\}$ . Fixadas as coberturas  $\{V_\alpha\}$  e  $\{U_\alpha\}$ , bem como os sistemas de coordenadas  $x_0$ , a aplicação  $v \rightarrow |v|$  define uma norma no espaço vetorial (de dimensão infinita) dos campos vetoriais contínuos sobre  $M$ . Em particular, podemos considerar a distância  $|v - w|$  entre dois campos vetoriais contínuos, como a norma do campo diferença. É claro que diferentes escolhas das coberturas  $\{V_\alpha\}$  e  $\{U_\alpha\}$ , ou dos sistemas  $x_\alpha$ , dão origem a diferentes normas no espaço dos campos vetoriais contínuos, mas é fácil ver que a topologia subjacente a todas essas normas é a mesma. No que se segue, quando nos referirmos à distância entre dois campos vetoriais contínuos, temos sempre em mente a métrica definida por uma qualquer dessas normas, a qual permanecerá fixa no decorrer de uma dada discussão. Assim, por exemplo, no enunciado do teorema abaixo está implícito que fixamos, de antemão, as coberturas  $\{U_\alpha\}$  e  $\{V_\alpha\}$ , bem como os sistemas de coordenadas  $x_\alpha$ , em relação aos quais é definida a distância entre dois campos vetoriais.

**Teorema 2.** *Seja  $M^n$  uma variedade compacta. Dado um campo vetorial contínuo  $v$  sobre  $M$  e um número  $\varepsilon > 0$ , existe um campo vetorial diferenciável  $w$  sobre  $M$ , tal que  $|w - v| < \varepsilon$ .*

**Demonstração:** Seja  $\{\varphi_\alpha; \alpha = 1, \dots, r\}$  uma partição diferenciável da unidade subordinada à cobertura  $U_\alpha$ . Para  $p \in V_\alpha$ , seja  $v_p = \sum_{i=1}^n a_\alpha^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}(p)$ . Se  $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ , indiquemos com  $(\partial x_\beta^i / \partial x_\alpha^j)$  a matriz jacobiana da mudança de



coordenadas  $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ . Seja

$$d = \sup \left\{ \left| \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}(p) \right| ; \right. \\ \left. p \in \bar{U}_\alpha \cap \bar{U}_\beta ; \alpha, \beta = 1, \dots, r ; i, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Aproximemos as funções contínuas  $a_\alpha^i$  por funções diferenciáveis  $b_\alpha^i: V_\alpha \rightarrow R$ , tais que  $|b_\alpha^i(p) - a_\alpha^i(p)| < \varepsilon/dnr$  para todo  $p \in \bar{U}_\alpha$ . Definamos, em seguida, o campo vetorial diferenciável  $w$  sobre  $M$  pondo, para cada  $p \in M$ ,

$$w_p = \sum_{\alpha, i} \varphi_\alpha(p) b_\alpha^i(p) \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}(p).$$

(Bem entendido, se  $p \notin V_\alpha$  todas as parcelas de índice  $\alpha$  devem ser omitidas, o que está de acordo com o fato de ser  $\varphi_\alpha(p) = 0$  neste caso). Para  $\beta = 1, \dots, r$ , e  $p \in V_\beta$ , temos

$$w_p = \sum_i c_\beta^i(p) \frac{\partial}{\partial x_\beta^i}(p),$$

onde

$$c_\beta^i(p) = \sum_{\alpha, j} \varphi_\alpha(p) \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}(p) b_\alpha^j(p).$$

Por outro lado,

$$a_\beta^i(p) = \sum_\alpha \varphi_\alpha(p) a_\alpha^i(p) = \sum_{\alpha, j} \varphi_\alpha(p) \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}(p) a_\alpha^j(p).$$

Logo, para todo  $p \in \bar{U}_\beta$ , temos

$$c_\beta^i(p) - a_\beta^i(p) = \sum_{\alpha, j} \varphi_\alpha \frac{\partial x_\beta^i}{\partial x_\alpha^j} (b_\alpha^j - a_\alpha^j),$$

donde  $|c_\beta^i(p) - a_\beta^i(p)| < \varepsilon$ , pois o segundo membro é soma de  $nr$  parcelas, todas elas de valor absoluto inferior a  $d$  ( $\varepsilon/dnr$ ). Logo  $|w - v| < \varepsilon$ .

**Corolário.** *Se existe sobre  $M$  um campo vetorial contínuo sem singularidades, existe também um campo vetorial diferenciável sem singularidades.*

Com efeito, se o campo contínuo dado é  $v$ , com  $v_p = \sum_i a_\alpha^i(p) \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$ , para  $p \in V_\alpha$ , ponhamos

$$\varepsilon = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |a_\alpha^i(p)|; p \in \bar{U}_\alpha; \alpha = 1, \dots, r \right\}.$$

Como  $v$  não possui singularidades, temos  $\varepsilon > 0$ . Aproximemos  $v$  por um campo diferenciável  $w$ , com  $|w - v| < \frac{\varepsilon}{2n}$ . Então, para todo  $\alpha$ , e  $p \in \bar{U}_\alpha$ , temos  $w_p = \sum_i b_\alpha^i(p) \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$ , com  $|b_\alpha^i(p) - a_\alpha^i(p)| < \varepsilon/2n$ . Logo,

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \sum_i i |a_\alpha^i(p)| \leq \sum_i |b_\alpha^i(p) - a_\alpha^i(p)| + \sum_i |b_\alpha^i(p)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ &\quad + \sum_i |b_\alpha^i(p)|, \end{aligned}$$

donde  $\sum_i |b_\alpha^i(p)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$  quaisquer que sejam  $p \in \bar{U}_\alpha$  e  $\alpha = 1, \dots, r$ . Assim  $w_p \neq 0$  em todo ponto  $p \in M$ .

De maneira análoga, se verifica que a existência de  $m$  campos vetoriais contínuos linearmente independentes sobre  $M$  implica a existência de  $m$  campos diferenciáveis linearmente independentes.

## 2 O espaço fibrado tangente

Um campo vetorial sobre uma variedade  $M$ , como foi definido no §1, é, na realidade, uma aplicação de  $M$  no conjunto formado pela reunião  $\bigcup_p M_p$  de todos os espaços vete-

riais tangentes a  $M$ . É de grande conveniência munir esta reunião de uma estrutura de variedade diferenciável, de modo que os campos vetoriais contínuos ou diferenciáveis sobre  $M$  sejam aplicações contínuas ou diferenciáveis de  $M$  nessa nova variedade. Assim fazendo, podemos aplicar aos campos vetoriais as técnicas gerais, relativas às aplicações contínuas e diferenciáveis. Neste parágrafo, introduziremos essa variedade dos vetores tangentes de uma variedade  $M$ .

Dada uma variedade diferenciável  $M^n$ , indicaremos com  $\tau(M)$  a variedade diferenciável de dimensão  $2n$  formada por todos os vetores tangentes em todos os pontos de  $M$ . Chamaremos  $\tau(M)$  o *espaço fibrado tangente de  $M$* . Daremos, em seguida, uma breve descrição de  $\tau(M)$ . Maiores detalhes podem ser encontrados em [4], [13], [22].

O conjunto  $\tau(M)$  consta de todos os pares  $(p, v)$ , onde  $p \in M$ , e  $v \in M_p$  é um vetor tangente a  $M$  no ponto  $p$ . Existe uma projeção natural  $\pi: \tau(M) \rightarrow M$ , sobre  $M$ , definida por  $\pi(p, v) = p$ . A estrutura de variedade diferenciável de  $\tau(M)$  é introduzida a partir da estrutura de  $M$ , tomando-se como sistemas de coordenadas locais em

$\tau(M)$ , as aplicações  $\tilde{x}: \tilde{U} \rightarrow R^{2n}$ , onde  $x: U \rightarrow R^n$  é um sistema de coordenadas em  $M$ ,  $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ , e

$$\tilde{x}(p, v) = (x^1(p), \dots, x^n(p), \alpha^1, \dots, \alpha^n), \text{ se } v = \sum \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Os sistemas  $\tilde{x}$  assim obtidos constituem um atlas  $\tilde{\mathfrak{A}}$  de dimensão  $2n$  em  $\tau(M)$ . Este atlas é diferenciável pois, se  $y: V \rightarrow R^n$  é outro sistema de coordenadas em  $M$ , com  $U \cap V \neq \emptyset$ , e se indicarmos, abreviadamente, a mudança de coordenadas  $y \circ x^{-1}$  com  $(x^1, \dots, x^n) \rightarrow (y^1, \dots, y^n)$ , então o sistema  $\tilde{y}: \tilde{V} \rightarrow R^{2n}$ , com  $\tilde{V} = \pi^{-1}(V)$  e

$$\tilde{y}(p, v) = (y^1(p), \dots, y^n(p), \beta^1, \dots, \beta^n), \quad v = \sum \beta^i \frac{\partial}{\partial y^i},$$

relaciona-se com o sistema  $\tilde{x}$  através da mudança de coordenadas  $\tilde{y} \circ \tilde{x}^{-1}$ , dada por

$$\begin{aligned} & (x^1, \dots, x^n, \alpha^1, \dots, \alpha^n) \rightarrow \\ & \rightarrow \left( y^1, \dots, y^n, \sum \frac{\partial y^1}{\partial x^i} \alpha^i, \dots, \sum \frac{\partial y^n}{\partial x^i} \alpha^i \right), \end{aligned}$$

a qual é, sem dúvida, diferenciável.

Assim,  $\tau(M)$  é uma variedade diferenciável, de dimensão  $2n$ . Notemos que a matriz jacobiana da aplicação  $\tilde{y} \circ \tilde{x}^{-1}$  é formada por quatro blocos quadrados  $n \times n$ , assumindo o aspecto:

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) & 0 \\ \left( \sum_k \frac{\partial^2 y^1}{\partial x^k \partial x^j} \alpha^k \right) & \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) \end{bmatrix}$$

Assim, o determinante jacobiano da aplicação  $\tilde{y} \circ \tilde{x}^{-1}$  é igual a  $[\det(\partial y^i / \partial x^j)]^2$  e é, portanto,  $> 0$  em todos os pontos.

Em outras palavras, o atlas  $\tilde{\mathfrak{A}}$  sobre  $\tau(M)$  é coerente e, em particular,  $\tau(M)$  é sempre orientável, quer  $M$  o seja, quer não.

A projeção  $\pi: \tau(M) \rightarrow M$  é diferenciável pois, em termos de um sistema de coordenadas locais  $x$  em  $M$  e do sistema correspondente  $\tilde{x}$  em  $\tau(M)$ ,  $\pi$  se exprime como a projeção  $(x^1, \dots, x^n, \alpha^1, \dots, \alpha^n) \rightarrow (x^1, \dots, x^n)$ .

Um *campo vetorial* na variedade  $M$  pode agora ser definido como uma aplicação  $v: M \rightarrow \tau(M)$  tal que, para todo  $p \in M$ ,  $\pi(v(p)) = p$ . Isto equivale a dizer que um campo vetorial é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um vetor  $v_p \in M_p$ , tangente a  $M$  no ponto  $p$ , sendo  $v(p) = (p, v_p) \in \tau(M)$ . Logo, esta definição é equivalente à que foi dada no parágrafo anterior. Um campo é *contínuo* (resp. *diferenciável*) se, e somente se, a aplicação  $v: M \rightarrow \tau(M)$  é contínua (resp. diferenciável).

Seja  $v: M \rightarrow \tau(M)$  um campo vetorial diferenciável na variedade  $M$ . Como  $\pi \circ v = \text{identidade}$  (onde  $\pi: \tau(M) \rightarrow M$  é a projeção), vê-se imediatamente que  $v$  é uma imersão de  $M$  em  $\tau(M)$ .

Indicaremos, de uma vez por todas, com  $\theta: M \rightarrow \tau(M)$  o campo de vetores identicamente nulo:  $\theta_p = 0$  para todo  $p \in M$ .

Seja  $p \in M$  uma singularidade do campo vetorial diferenciável  $v: M \rightarrow \tau(M)$ , isto é,  $v_p = 0$ . Diremos que  $p$  é um *singularidade simples* se os subespaços vetoriais  $v_*(M_p)$  e  $\theta_*(M_p)$  de  $\tau(M)_{(p,0)}$  tiverem apenas o vetor 0 em comum. Isto equivale a dizer que  $\theta_*(M_p) \oplus v_*(M_p) = \tau(M)_{(p,0)}$  e, geometricamente, significa que as subvariedades  $\theta(M)$ ,  $v(M) \subset \tau(M)$  interseccionam-se “transversalmente” no ponto  $(p, 0) = v(p) = \theta(p)$ .

**Lema 2.** *Seja  $x: U \rightarrow R^n$  um sistema de coordenadas em  $M$ , onde a singularidade  $p$  do campo  $v$  pertence a  $U$ . Temos  $v_p = \sum_i a^i(q) \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $q \in U$ , e  $a^i(p) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .*

*A singularidade  $p$  é simples se, e somente se,  $\det \left( \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \right) \neq 0$  no ponto  $p$ .*

**Demonstração:** Em termos dos sistemas de coordenadas  $x$  em  $M$  e  $\tilde{x}$  em  $\tau(M)$ , as aplicações  $v$  e  $\theta$  se exprimem da forma

$$\begin{aligned} \theta: (x^1, \dots, x^n) &\rightarrow (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0) \\ v: (x^1, \dots, x^n) &\rightarrow (x^1, \dots, x^n, a^1(x^1, \dots, x^n), \dots, \\ &\quad a^n(x^1, \dots, x^n)). \end{aligned}$$

Uma base de  $M_p$  é dada pelos vetores  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . A condição de ser simples a singularidade, significa que os vetores

$$\theta_* \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right), \dots, \theta_* \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right), \quad v_* \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right), \dots, v_* \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$$

são linearmente independentes. Ora, em relação ao sistema de coordenadas  $\tilde{x}$ , cada vetor  $\theta_* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$  tem coordenadas  $(0, \dots, 1, \dots, 0, 0, \dots, 0)$ , isto é, todas nulas exceto a  $i$ -ésima, que é igual a 1. E as coordenadas do vetor  $v_* \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$  no mesmo sistema  $\tilde{x}$  são

$$\left( 0, \dots, 1, \dots, 0, \frac{\partial a^1}{\partial x^j}(p), \dots, \frac{\partial a^n}{\partial x^j}(p) \right),$$

onde as  $n$  primeiras coordenadas são nulas, com exceção da  $j$ -ésima. Assim, a matriz quadrada cujas colunas são as coordenadas dos vetores  $\theta_* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$  e  $v_* \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)$  relativamente

ao sistema  $\tilde{x}$  assume a forma abaixo, onde os quatro blocos são matrizes  $n \times n$ :

$$\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & \left( \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \right) \end{pmatrix}.$$

Os  $2n$  vetores em questão são linearmente independentes se, e somente se, esta matriz tem determinantes  $\neq 0$ . Mas este determinante é evidentemente igual a  $\det \left( \frac{\partial a^i}{\partial x^j}(p) \right)$ , o que demonstra o Lema.

**Corolário.** *As singularidades simples de um campo vetorial diferenciável  $v$  são isoladas no conjunto de todas as singularidades de  $v$ .*

Seja  $p \in M$  uma singularidade simples de  $v$ . Devemos mostrar que existe uma vizinhança  $V \ni p$  tal que  $p$  é a única singularidade de  $v$  em  $V$ . Ora, num sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$ , com  $p \in U$  e  $v_q = \sum_i a^i(q) \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $q \in U$ , temos  $a^i(p) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e  $\det \left( \frac{\partial a^i}{\partial x^j}(p) \right) \neq 0$ . Logo, pelo teorema da função inversa, existe uma vizinhança  $V \ni p$  tal que a aplicação  $(x^1, \dots, x^n) = q \rightarrow (a^1(q), \dots, a^n(q))$  é um difeomorfismo de  $V$  sobre uma vizinhança do ponto  $(0, \dots, 0)$ . Portanto, para todo  $q \neq p$  em  $V$ , teremos  $(a^1(q), \dots, a^n(q)) \neq (0, \dots, 0)$ , isto é, nenhum outro ponto  $q \in V$ , além de  $p$ , é uma singularidade de  $v$ .

As singularidades de um campo vetorial contínuo sobre  $M$  formam evidentemente um subconjunto fechado de  $M$ . Segue-se então do Corolário acima que se  $M$  é compacta e  $v$  é um campo diferenciável sobre  $M$  cujas singularidades são todas simples, estas são em número finito apenas.

Outra interpretação para o conceito de singularidade simples é a seguinte. O campo diferenciável  $v$  sobre  $M$  determina o conjunto de difeomorfismo  $\varphi_t: M \rightarrow M$ ,  $t$  real. Se  $p$  é uma singularidade de  $v$ , então  $\varphi_t(p) = p$  para todo  $t$ . Logo, cada  $\varphi_t$  induz uma aplicação linear  $(\varphi_t)_*: M_p \rightarrow M_p$ . Por simplicidade, escrevamos  $A(t) = (\varphi_t)_*$ . Seja  $A' = \frac{dA}{dt}(0)$ . Então, a singularidade  $p$  é simples se, e somente se,  $A': M_p \rightarrow M_p$  é uma aplicação linear invertível. Na realidade, um resultado mais preciso vale: o determinante de  $A'$  é igual a  $\det\left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}(p)\right)$ , com a notação do Lema 3.

Com efeito, numa vizinhança de  $p$ , onde é válido um sistema de coordenadas  $x$ , os difeomorfismos  $\varphi_t$ , para  $t$  suficientemente pequeno, são dados por  $\varphi_t(x^1, \dots, x^n) = (\varphi^1(x, t), \dots, \varphi^n(x, t))$ ,  $x = (x^1, \dots, x^n)$ . Seja, para simplificar,  $x(p) = 0$ . Então a matriz de  $(\varphi_t)_* = A(t): M_p \rightarrow M_p$ , no sistema  $x$  é igual  $\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(0, t)\right)$ . Logo  $A' = \frac{dA}{dt}(0)$  tem para matriz  $\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}\right)\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{d\varphi^i}{dt}\right)\right) = \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right)$ , pois  $\frac{d\varphi^i}{dt}(0) = a^i$  em virtude de  $\varphi$  ser integral de  $v$ . Logo,  $\det(A') = \det(\partial a^i / \partial x^j)$ .

Segue-se daí, em particular, que, numa singularidade  $p$ , o valor do determinante  $\det(\partial a^i / \partial x^j)$  tem significado intrínseco, independente do sistema de coordenadas  $x$  em torno de  $p$ .

Diremos que o *índice* da singularidade simples  $p$  do campo  $v$  é igual a  $+1$  se  $\det(\partial a^i / \partial x^j) > 0$  no ponto  $p$ . Se, ao contrário, tivermos  $\det(\partial a^i / \partial x^j) < 0$  no ponto  $p$ , diremos que o *índice* de  $p$  é  $-1$ . Pelo que mostramos acima, o *índice* de uma singularidade simples é um conceito bem definido, independente do sistema de coordenadas usado. Este fato também pode ser verificado diretamente, sem recurso à integração do campo  $v$ .



Com efeito, sejam  $x$ ,  $y$  sistemas de coordenadas em torno de  $p$ , com  $v_q = \sum_i a^i(x(q)) \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_i b^i(y(q)) \frac{\partial}{\partial y^i}$ ,  $q$  numa vizinhança  $U$  de  $p$ . Temos  $a^i(x(p)) = b^i(y(p)) = 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Sabemos também que

$$b^i(y(q)) = \sum_j a^j(x(q)) \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x(q)), \quad i = 1, \dots, n, \quad q \in U.$$

Derivando esta igualdade em relação a  $y^k$  no ponto  $y(p)$ , temos

$$\frac{\partial b^i}{\partial y^k} = \sum_{j,s} \frac{\partial a^j}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \sum_{j,s} a^j \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^j \partial x^s} \cdot \frac{\partial x^s}{\partial y^k}.$$

Mas, no ponto  $p$ , todos os  $a^j$  são iguais a zero. Assim, a segunda parcela acima desaparece. Obtemos assim a igualdade seguinte, onde o produto é dado pela multiplicação de matrizes:

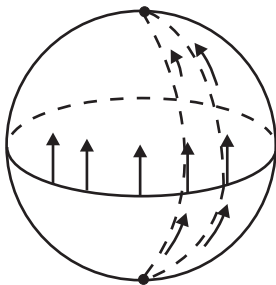
$$(\partial b^i / \partial y^i) = (\partial y^i / \partial x^j) \cdot (\partial a^i / \partial x^j) \cdot (\partial x^i / \partial y^j),$$

ou seja:

$$(\partial b^i / \partial y^j) = (\partial y^i / \partial x^j) \cdot (\partial a^i / \partial x^j) \cdot (\partial x^i / \partial y^j)^{-1}.$$

Segue-se que  $\det(\partial b^i / \partial y^j) = \det(\partial a^i / \partial x^j)$ .

**Exemplo:** Consideremos a esfera unitária  $S^n \subset R^{n+1}$ , a qual é reunião do hemisfério norte  $U = \{p = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n; x^{n+1} > 0\}$ , mais o hemisfério sul  $V = \{p = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n; x^{n+1} < 0\}$  e mais o equador  $E = \{p = (x^1, \dots, x^{n+1}) \in S^n; x^{n+1} = 0\}$ .



Como sabemos, são definidos nos hemisférios sistemas de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$ ,  $y: V \rightarrow R^n$ , que consistem em, simplesmente, desprezar a  $(n+1)$ -ésima coordenada de um ponto (de  $U$  ou de  $V$ ), considerado como ponto de  $R^{n+1}$ . Definiremos agora um campo vetorial diferenciável  $v$  sobre  $S^n$ . No hemisfério sul, poremos  $v_p = y^1 \frac{\partial}{\partial y^1} + \cdots + y^n \frac{\partial}{\partial y^n}$ , onde  $(y^1, \dots, y^n) = y(p)$ ,  $p \in V$ . Se, porém,  $p \in U$  é um ponto do hemisfério norte, com  $x(p) = (x^1, \dots, x^n)$ , poremos  $v_p = -(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + x^n \frac{\partial}{\partial x^n})$ . Para cada ponto  $p$  pertencente ao equador  $E$ , poremos  $v_p = (0, \dots, 0, 1) \in R^{n+1}$ . É claro que  $v_p \in (S^n)_p$ , para todo  $p \in E$  e, além disso, não há dificuldade em verificar que o campo  $v$ , assim definido, é diferenciável sobre  $S^n$  (ver figura). As únicas singularidades de  $v$  são o polo norte  $a = (0, 0, \dots, 0, 1)$  e o polo sul  $b = (0, \dots, 0, -1)$ . A matriz que consta no Lema 3 é constante, igual à identidade  $I$  no hemisfério sul, e igual a  $-I$  no hemisfério norte. Logo, os determinantes correspondentes as singularidades  $a$  e  $b$  são respectivamente iguais a  $(-1)^n$  e  $1$ . Assim, os polos são singularidades simples de  $v$ . O índice do polo norte relativamente ao campo  $v$  é  $+1$  se  $n$  é par e  $-1$  se  $n$  é ímpar, enquanto o índice do polo sul é sempre  $-1$ , quer  $n$  seja par, quer seja ímpar.

Nosso principal objetivo neste capítulo será mostrar que todo campo vetorial contínuo sobre uma variedade pode ser arbitrariamente aproximado por um campo diferenciável cujas singularidades são todas simples, e que a soma dos índices das singularidades de um campo que só tem singularidades simples é um invariante da variedade compacta  $M$ , isto é, não depende do campo escolhido. Sendo a noção de “singularidade simples” um caso particular do conceito geral de “transversalidade”, faremos um estudo sucinto sobre transversalidade no parágrafo seguinte.

### 3 Transversalidade e suas aplicações

O conceito de aplicação  $f: M^m \rightarrow N^n$  transversal a uma subvariedade  $S^s \subset N^n$  é uma generalização natural da noção de aplicação que admite um ponto  $q \in N$  como valor regular. Este conceito vem sistematizar, dentro da categoria das variedades diferenciáveis, a idéia de figuras que se intersectam em “posição geral”, idéia esta que se apresenta como inevitável em diversas teorias geométricas. A definição de aplicação transversal e uma variedade foi dada por Thom [23], a quem se deve também o teorema geral de aproximação que daremos a seguir. Para desenvolvimentos mais elaborados da idéia de transversalidade e suas aplicações, o leitor poderá consultar a exposição [24] e os trabalhos lá citados.

Seja  $f: M^m \rightarrow N^n$  uma aplicação diferenciável. Fixemos também uma subvariedade  $S^s \subset N^n$ . Diremos que  $f$

é transversal a  $S$  num ponto  $p \in f^{-1}(S)$  quando

$$f_*(M_p) + S_q = N_q, \quad q = f(p) \in S,$$

isto é, quando a imagem  $f_*(M_p) \subset N_q$  mais o subespaço  $S_q \subset N_q$  gerarem o espaço  $N_q$ . Diremos que  $f$  é transversal a  $S$ , simplesmente, quando, para todo ponto  $p \in f^{-1}(S)$ ,  $f$  for transversal a  $S$  no ponto  $p$ .

Por exemplo, quando  $S = \{q\}$  reduz-se a um ponto,  $f: M \rightarrow N$  é transversal a  $q$  se, e somente se, o ponto  $q$  é um valor regular de  $f$ . Quando  $f(M) \cap S = \emptyset$ , então  $f: M \rightarrow N$  é automaticamente transversal a  $S$ . Se  $f(M) \cap S \neq \emptyset$  e  $f$  é transversal a  $S$ , então  $m + s \geq n$ . Ou seja, quando  $\dim(M) + \dim(S) < \dim(N)$ ,  $f: M \rightarrow N$  só pode ser transversal a  $S$  se  $f(M) \cap S = \emptyset$ . Isto ilustra a idéia intuitiva de que  $f$  é transversal a  $S$  quando  $f(M)$  intersesta  $S$  o “mínimo possível”. A noção que acabamos de definir ganha maior conteúdo geométrico quando  $M$  e  $S$  são ambas subvariedades de  $N$  e  $f: M \subset N$  é a aplicação de inclusão. Neste caso, diz-se que  $M$  e  $S$  intersestam-se transversalmente, ou estão em *posição geral*, para significar que  $f$  é transversal a  $S$ .

Dada uma variedade  $M^m$ , seja  $v: M \rightarrow \tau(M)$  um campo vetorial diferenciável. Considerando o campo vetorial identicamente nulo  $\theta: M \rightarrow \tau(M)$ , o qual determina a subvariedade  $\theta(M) \subset \tau(M)$ , a aplicação diferenciável  $v$  é transversal a  $\theta(M)$  num ponto  $p \in v^{-1}(\theta(M))$  (isto é, numa singularidade  $p$  do campo  $v$ ) se, e somente se,  $p$  é uma singularidade simples. As singularidades do campo  $v$  são todas simples se, e somente se, a aplicação  $v$  é transversal à subvariedade  $\theta(M)$ , isto é, as subvariedades  $v(M)$ ,  $\theta(M) \subset \tau(M)$  estão em posição geral. Com estas inter-

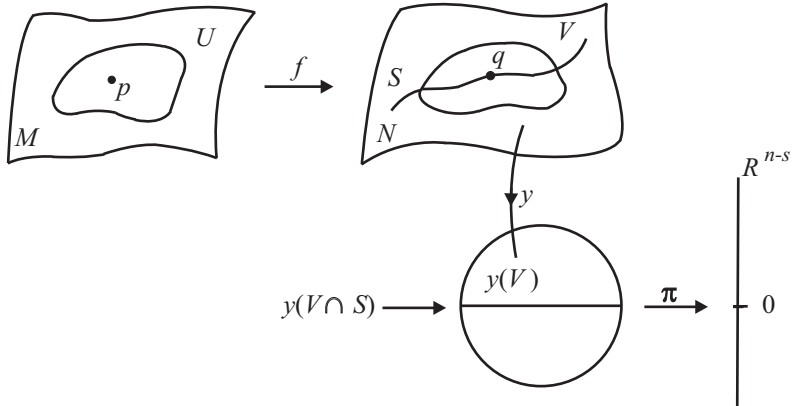
pretações é que aplicaremos os teoremas gerais sobre transversalidade para demonstrar resultados sobre singularidades de campos vetoriais.

Seja  $f: M^m \rightarrow N^n$  uma aplicação diferenciável e  $S^n \subset N^n$  uma subvariedade. Tomemos um sistema de coordenadas  $y: V \rightarrow R^n$  em  $N$ , tal que  $V \cap S = \{q \in V; y^{s+1}(q) = \dots = y^n(q) = 0\}$ . Nas considerações que faremos agora, chamaremos  $R_0^s$  ao subespaço de  $R^n$  formado pelos vetores  $(\alpha^1, \dots, \alpha^s, 0, \dots, 0)$  que têm as últimas coordenadas nulas. Assim,  $y(V \cap S) = y(V) \cap R_0^s$ , e  $y_*(S_q) = R_0^s$  para todo  $q \in V \cap S$ . Seja  $\pi: R^n \rightarrow R^{n-s}$  a projeção definida por  $\pi(y^1, \dots, y^n) = (y^{s+1}, \dots, y^n)$ , de modo que  $(\pi \circ y)^{-1}(0) = V \cap S$ ,  $0 \in R^{n-s}$ . Finalmente, seja  $U \subset M$  um aberto tal que  $f(U) \subset V$ . Nestas condições, podemos enunciar o

**Lema 3.** *A aplicação  $f: M^m \rightarrow N^n$  é transversal a  $S$  em todos os pontos de  $U \cap f^{-1}(S)$  se, e somente se,  $0 \in R^{n-s}$  é um valor regular da aplicação  $\pi \cdot y \cdot f: U \rightarrow R^{n-s}$ .*

**Demonstração:** Seja  $p \in U \cap f^{-1}(S)$ . ponhamos  $q = f(p)$ .

A aplicação  $f$  será transversal a  $S$  no ponto  $p$  se, e somente se,  $f_*(M_p) + S_q = N_q$ . Sendo  $y_*: N_q \rightarrow R^n$  um isomorfismo e  $y_*(S_q) = R_0^s$ , a última condição equivale a  $(y \circ f)_*(M_p) + R_0^s = R^n$ . Ora, dado um subespaço vetorial  $E \subset R^n$ , tem-se  $\pi(E) = R^{n-s}$  se, e somente se,  $E + R_0^s = R^n$ . Logo,  $f$  é transversal a  $S$  no ponto  $p$  se, e somente se,  $(\pi \circ y \circ f)_*(M_p) = R^{n+s}$ . Como  $U \cap f^{-1}(S) = (\pi \circ y \circ f)^{-1}(0)$ , concluímos que  $f$  é transversal a  $S$  em todos os pontos  $p \in U \cap f^{-1}(S)$  se, e somente se,  $0$  é um valor regular de  $\pi \circ y \circ f$ .



**Corolário.** Se  $f: M^m \rightarrow N^n$  é transversal a subvariedade  $S^s \subset N^n$ , então  $f^{-1}(S^s)$  é uma subvariedade de  $M^m$ , de dimensão igual a  $m + s - n$ .

Com efeito, para cada  $p \in f^{-1}(S)$ , seja  $q = f(p)$ , e tomemos um sistema de coordenadas  $y: V \rightarrow R^n$  em  $N$ , com  $q \in V$ , nas condições do Lema 3. Escolhamos  $U \ni p$  um aberto tal que  $f(U) \subset V$ . Então  $U \cap f^{-1}(S) = (\pi \cdot y \cdot f)^{-1}(0)$ ,  $0 \in R^{n-s}$  sendo valor regular de  $\pi \cdot y \cdot f$ . Daí resulta que  $U \cap f^{-1}(S)$  é uma subvariedade de  $U$ , de dimensão  $m - (n - s) = m + s - n$ . Assim, todo ponto  $p \in f^{-1}(S)$  tem uma vizinhança  $U$  em  $M$  tal que a parte de  $f^{-1}(S)$  em  $U$  é uma subvariedade de  $U$ . Logo,  $f^{-1}(S)$  é uma subvariedade de  $M$ .

**Observações:** 1) Tomando  $M^m$  como subvariedade de  $N^n$  e  $f: M^m \subset N^n$  como a aplicação de inclusão, concluímos que, se duas subvariedades  $M^m, S^s \subset N^n$  estão em posição geral, então  $M^m \cap S^s$  é uma subvariedade de  $M^m$ , (donde de  $N$  e de  $S$ ) cuja dimensão é  $m + s - n$ .

2) Como recurso mnemônico para gravar o número  $m+s-n$ , basta lembrar que  $\dim M - \dim f^{-1}(S) = \dim N - \dim S$ , ou seja,  $f^{-1}(S)$  tem a mesma “codimensão” que  $S$ .

Antes de demonstrarmos o “Lema da Transversalidade” (Teorema 3, a seguir) diremos algumas palavras acerca de algumas topologias que se podem introduzir no espaço  $\mathcal{F}(M^m, N^n)$  das aplicações diferenciáveis de  $M^m$  em  $N^n$ . Por simplicidade, suporemos que  $M$  é compacta, já que só teremos ocasião de utilizar este caso.

Temos, em primeiro lugar, a *topologia*  $C^0$ , que pode ser descrita do seguinte modo. Imergimos  $M$  e  $N$  num espaço euclidiano  $R^k$ . Em seguida, dadas  $f, g: M^m \rightarrow N^n$  diferenciáveis, definimos a distância

$$d_0(f, g) = \sup\{|f(p) - g(p)|; p \in M\},$$

onde a norma  $|f(p) - g(p)|$  é a do espaço  $R^k$ . A métrica  $d_0$  depende, evidentemente, das imersões de  $M$  e  $N$  em  $R^k$  mas facilmente se vê que a topologia por ela definida em  $\mathcal{F}(M^m, N^n)$  é a mesma, quaisquer que sejam essas imersões. Esta é a topologia  $C^0$  que é simplesmente a topologia da convergência uniforme.

Para nós aqui, será mais útil a *topologia*  $C^1$  em  $\mathcal{F}(M^m, N^n)$ , para a definição da qual começamos também com imersões  $M^m, N^n \subset R^k$  e, a partir destas, introduzimos a distância  $d_1(f, g)$  entre duas aplicações diferenciáveis  $f, g: M^m \rightarrow N^n$  como o maior dos dois números abaixo:

$$d_0(f, g) \quad \text{e} \quad \sup\{|f_*(u) - g_*(u)|; u \in M_p, |u| = 1, p \in M\},$$

sendo ainda a norma  $|f_*(u) - g_*(u)|$  aquela existente entre os vetores de  $R^k$ . Como no caso anterior, a distância

$d_1(f, g)$  depende das imersões de  $M$  e  $N$  em  $R^k$ , mas a topologia que esta distância define em  $\mathcal{F}(M^m, N^n)$  não depende das imersões. Ela é a topologia  $C^1$  e a convergência por ela definida significa convergência uniforme da função e de todas as suas derivadas.

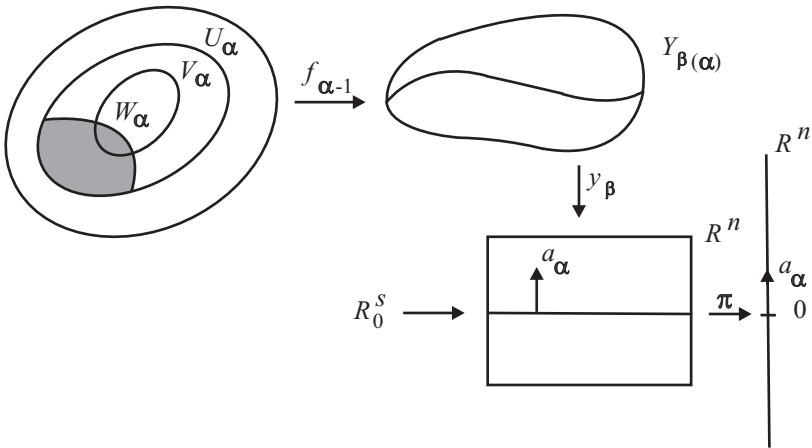
**Teorema 3.** *Sejam  $M^m$  uma variedade compacta,  $f: M^m \rightarrow N^n$  uma aplicação diferenciável,  $S^s \subset N^n$  uma subvariedade, e  $X \subset M$  um subconjunto fechado tal que  $f$  é transversal a  $S$  em todos os pontos de  $X \cap f^{-1}(S)$ . (Em muitas aplicações do teorema, o conjunto  $X$  é vazio). Então, dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma aplicação diferenciável  $g: M^m \rightarrow N^n$  tal que:*

*$d_1(f, g) < \varepsilon$ ,  $g$  é transversal a  $S$ , e  $g$  coincide com  $f$  em  $X$ .*

**Demonstração:** Sejam  $y_\beta: Y_\beta \rightarrow R^n$  sistemas de coordenadas locais em  $N$ , tais que  $f(M) \subset \cup Y_\beta$  e cada  $Y_\beta \cap S$  é o conjunto dos pontos de  $Y_\beta$  cujas últimas  $n - s$  coordenadas no sistema  $y_\beta$  são nulas. Sendo imediato que o conjunto dos pontos de  $f^{-1}(S)$ , nos quais  $f$  é transversal a  $S$ , é aberto em  $f^{-1}(S)$ , podemos obter um aberto  $U \supset X$  em  $M$ , tal que  $f$  é transversal a  $S$  em todos os pontos de  $\bar{U} \cap f^{-1}(S)$ . Sejam  $x_\alpha: U_\alpha \rightarrow R^m$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ) sistemas de coordenadas locais em  $M$  tais que  $U_\alpha \cap X = \emptyset$ ,  $M - U \subset U_1 \cup \dots \cup U_r$ ,  $x_\alpha(U_\alpha) = B(3)$  e, pondo  $V_\alpha = x_\alpha^{-1}(B(2))$ ,  $W_\alpha = x_\alpha^{-1}(B(1))$ , os  $W_\alpha$  ainda cobrem  $M - U$ . Como  $f$  é contínua, podemos ainda tomar os  $U_\alpha$  de modo que, para cada  $\alpha$ , exista um  $\beta = \beta(\alpha)$  com  $f(U_\alpha) \subset Y_\beta$ . Sejam  $\varphi_1, \dots, \varphi_r: M \rightarrow R$  funções reais diferenciáveis em  $M$ , com  $0 \leq \varphi_\alpha \leq 1$ ,  $\varphi_\alpha(W_\alpha) = 1$ ,  $\varphi_\alpha(M - V_\alpha) = 0$ . Definiremos, indutivamente, uma sequência de aplicações  $f_0, f_1, \dots, f_r: M \rightarrow N$ , diferenciáveis, tais que  $f_0 = f$ , cada



$f_\alpha$  coincide com  $f_{\alpha-1}$  em  $M - U_\alpha$  (donde, em particular, cada  $f_\alpha$  coincide com  $f$  em  $X$ ), cada  $f_\alpha$  é transversal a  $S$  nos pontos de  $(\bar{U} \cup \bar{Q}_1 \cup \dots \cup \bar{W}_\alpha) \cap f^{-1}(S)$  e, finalmente,  $d_1(f_\alpha, f_{\alpha_1}) < \varepsilon/2^\alpha$ . Uma vez obtidas estas aplicações, podemos simplesmente  $g = f_r$ . Começamos tomando  $f_0 = f$ . Supondo definidas  $f_0, \dots, f_{\alpha-1}$ , passemos à obtenção de  $f_\alpha$ . Seja  $a_\alpha \in R^{n-s}$  um vetor a determinar. Indiquemos com  $\bar{a}_\alpha$  o vetor correspondente em  $R^n$  (cujas primeiras  $s$  coordenadas são nulas e as restantes coincidem com as de  $a_\alpha$ ).



Ponhamos então

$$f_0(p) = \begin{cases} y_\beta^{-1}(y_\beta(f_{\alpha-1}(p)) + \varphi_\alpha(p)\bar{a}_\alpha), & \text{se } p \in U_\alpha; \\ f_{\alpha-1}(p), & \text{se } p \in M - U_\alpha. \end{cases}$$

Devemos agora mostrar que  $a_\alpha$  pode ser determinado de forma que  $f_\alpha$  satisfaça às propriedades estipuladas para a

indução. Em primeiro lugar, examinemos se  $f_\alpha$  é bem definida e diferenciável. Para isto, basta mostrar que, na expressão  $y_\beta^{-1}(\dots)$ , o que está dentro do parênteses pertence a  $y_\beta(Y_\beta)$ , para todo  $p \in U_\alpha$ . Isto é claro quando  $p \in U_\alpha - V_\alpha$  pois, neste caso,  $\varphi_\alpha(p) = 0$ . Se porém,  $p \in V_\alpha$ , o compacto  $y_\beta(f_{\alpha-1}(\overline{V}_\alpha))$  estando contido no aberto  $y_\beta(Y_\beta)$ , basta tomar  $a_\alpha$  de modo que  $|\overline{a}_\alpha|$  seja menor do que a distância de  $y_\beta(f_{\alpha-1}(\overline{V}_\alpha))$  a  $R^n - y_\beta(Y_\beta)$ . Em segundo lugar, mostraremos que, para todo  $a_\alpha$  suficientemente pequeno, temos  $d_1(f_\alpha, f_{\alpha-1}) < \varepsilon/2^\alpha$ . Isto é claro no que se refere a  $d_0(f_\alpha, f_{\alpha-1})$ . Quanto às derivadas, basta observar que, para todo  $p \in \overline{V}_\alpha$ ,  $(f_\alpha)_* = (f_{\alpha-1})_*$  e, nos pontos  $p \in \overline{V}_\alpha$ , para todo  $u \in M_p$ , com  $|u| = 1$ , temos

$$(f_\alpha)_*(u) = (f_{\alpha-1})_*(u) + (y_\beta^{-1})_*[(\varphi_\alpha)_*(u) \cdot \overline{a}_\alpha].$$

(Onde  $(\varphi_\alpha)_*(u)$  é um número, pois  $\varphi_\alpha$  é uma função real). Sendo  $\overline{V}_\alpha$  compacto, vê-se sem dificuldade que existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $a_\alpha \in R^{n-s}$  com  $|A_\alpha| < \delta$ , a 2ª parcela do segundo membro tem módulo inferior a  $\varepsilon/2^\alpha$ , donde  $|(f_\alpha)_*(u) - f_{\alpha-1}(u)| < \varepsilon/2^\alpha$ . Finalmente, resta mostrar que  $a_\alpha$  pode ser escolhido de forma a ter  $f_\alpha$  transversal a  $S$  em todos os pontos de  $(\overline{U} \cup \overline{W}_1 \cup \dots \cup \overline{W}_\alpha) \cap f^{-1}(S)$ , além de satisfazer às condições anteriores. Como  $f_\alpha = f_{\alpha-1}$  em  $M - \overline{V}_\alpha$  e  $f_{\alpha-1}$  é transversal a  $S$  nos pontos de  $(\overline{U} \cup \overline{W}_1 \cup \dots \cup \overline{W}_{\alpha-1}) \cap f^{-1}(S)$ , basta mostrar que  $a_\alpha$  pode ser escolhido de modo que  $f_\alpha$  seja transversal a  $S$ , em  $\overline{W}_\alpha \cap f^{-1}(S)$  e em  $K = \overline{V}_\alpha \cap (\overline{U} \cup \overline{W}_1 \cup \dots \cup \overline{W}_{\alpha-1}) \cap f^{-1}(S)$ . Afirmamos que, para ter  $f_\alpha$  transversal a  $S$  nos pontos de  $\overline{W}_\alpha \cap f^{-1}(S)$ , basta tomar  $a_0$  de modo que  $-a_\alpha$  seja valor regular da aplicação  $\pi \circ y_\beta \circ f_{\alpha-1}: U_\alpha \rightarrow R^{n-s}$ . Com efeito, se isto acontece, então 0 será valor regular da aplicação

$p \rightarrow \pi \circ y_\beta \circ f_{\alpha-1}(p) + a_\alpha$ , de  $U_\alpha$  em  $R^{n-s}$ , e portanto a aplicação  $p \rightarrow y_\beta^{-1}(f_{\alpha-1}(p) + a_\alpha)$ , de  $U_\alpha$  em  $N$ , será transversal a  $S$  (Lema 3). Mas esta aplicação coincide com  $f_\alpha$  em  $\overline{W}_\alpha$ , pois  $\varphi_\alpha(p) = 1$  para todo  $p \in \overline{W}_\alpha$ . Logo, para tal escolha de  $a_\alpha$ ,  $f_\alpha$  será transversal a  $S$  em todos os pontos de  $\overline{W}_\alpha \cap f^{-1}(S)$ . Em seguida, mostraremos que existe  $\delta' > 0$  tal que, para todo  $a_\alpha \in R^{n-s}$  com  $|a_\alpha| < \delta'$ ,  $f_\alpha$  é transversal a  $S$  em todos os pontos do compacto  $K$  acima definido. Isto equivale a provar que, para tais valores de  $a_\alpha$ , a aplicação  $p \rightarrow \pi \circ y_\beta \circ f_{\alpha-1}(p) + \varphi_\alpha(p) \cdot a_\alpha$ , de  $U_\alpha$  em  $R^{n-s}$ , tem matriz jacobiana de característica máxima,  $n - s$ , em todos os pontos de  $K$ . Ora, a matriz jacobiana desta aplicação, num ponto  $p \in K$ , é igual a  $J(p) + L(p) \cdot a_\alpha$ , onde  $J(p)$  é a matriz jacobiana,  $(n - s) \times m$ , da aplicação  $p \rightarrow \pi \circ y_\beta \circ f_{\alpha-1}(p)$  e  $L(p)$  é a matriz jacobiana,  $1 \times m$ , da função real  $\varphi_\alpha$ . (Como  $U_\alpha$  é o domínio do sistema de coordenadas  $x_\alpha$ , tem sentido falar em matrizes jacobianas. Estamos sempre usando as coordenadas do sistema  $x_\alpha$ . Para efeito de multiplicar matrizes, consideramos também os vetores como colunas). Pela hipótese de indução, para cada  $p \in K$ , a matriz  $J(p)$  tem característica máxima,  $n - s$ , pois  $f_{\alpha-1}$  é transversal a  $S$  nos pontos de  $K$ . Assim, o conjunto  $\{J(p); p \in K\}$  é também compacto, donde limitado no conjunto de todas as matrizes  $1 \times m$ . Assim, existe um  $\delta' > 0$  tal que, para todo  $a_\alpha \in R^{n-s}$  com  $|a_\alpha| < \delta'$ , a matriz produto  $L(p) \cdot a_\alpha$  (de ordem  $(n - s) \times m$ ) satisfaz a  $|L(p) \cdot a_\alpha| < \delta''$  qualquer que seja  $p \in K$ , e portanto  $J(p) + L(p) \cdot a_\alpha$  tem característica  $n - s$ , para todo  $p \in K$ . Isto mostra que, para  $a_\alpha \in R^{n-s}$  com  $|a_\alpha| < \delta'$ ,  $f_\alpha$  é transversal a  $S$  em todos os pontos de  $K$ . Como certamente entre estes  $a_\alpha$ 's existe um tal que  $-a_\alpha$  é valor regular de

$\pi \circ y_\beta \circ f_{\alpha-1}: U_\alpha \rightarrow R^{n-s}$  com este  $a_\alpha$  teremos também (como foi provado acima)  $f_\alpha$  transversal a  $S$  nos pontos de  $\overline{W}_\alpha \cap f^{-1}(S)$ , o que conclui a demonstração.

**Teorema 4.** *Todo campo vetorial diferenciável  $v: M \rightarrow \tau(M)$  pode ser arbitrariamente aproximado (na topologia  $C^1$ ) por um campo cujas singularidades são todas simples.*

**Demonstração:** Consideremos o campo vetorial identicamente nulo  $\theta: M \rightarrow \tau(M)$ . Fazendo  $S = \theta(M)$  no Teorema 3, vemos que é possível aproximar arbitrariamente (na topologia  $C^1$ ) a aplicação  $v: M \rightarrow \tau(M)$  por uma aplicação  $g: M \rightarrow \tau(M)$  que é transversal a  $\theta(M)$ . Infelizmente, porém, nada nos garante que  $g$  seja um campo vetorial (isto é, que se tenha  $\pi \cdot g =$  identidade, onde  $\pi: \tau(M) \rightarrow M$  é a projeção canônica). Nem ao menos sabemos que  $g$  é uma imersão. Entretanto, é um fato que o conjunto dos difeomorfismos de  $M$  sobre  $M$  é um aberto na topologia  $C^1$  de  $\mathcal{F}(M, M)$ . (Isto acha-se demonstrado explicitamente em [13], pag. 187, apenas para difeomorfismos de  $M$  num espaço euclidiano  $R^k$ , mas a demonstração se aplica *ipsis literis* para o caso presente). Ora, a identidade ( $= \pi \circ v$ ) é um difeomorfismo de  $M$ . Logo, se  $g$  estiver suficientemente próximo de  $v$  na topologia  $C^1$ , então  $\varphi = \pi \circ g$  estará também suficientemente próximo de  $\pi \circ v$  ( $=$  identidade) de modo a ser ainda um difeomorfismo. Consideremos então a aplicação diferenciável  $w = g \circ \varphi^{-1}: M \rightarrow \tau(M)$ . Como  $\pi \circ w = \pi \circ g \circ \varphi^{-1} = (\pi \circ g)(\pi \circ g)^{-1} =$  identidade, vemos que  $w$  é um campo vetorial. Além disso, como  $g$  é transversal a  $\theta(M)$  e  $\varphi^{-1}: M \rightarrow M$  é um difeomorfismo, é claro que  $w = g \circ \varphi^{-1}$  é também transversal a  $\theta(M)$ . Finalmente, escolhendo  $g$  bastante próxima de  $v$ , é possível fazer  $\varphi^{-1}$

arbitrariamente próximo da identidade, logo podemos obter também  $w = g \circ \varphi^{-1}$  arbitrariamente próximo de  $v$ , o que conclui a demonstração.

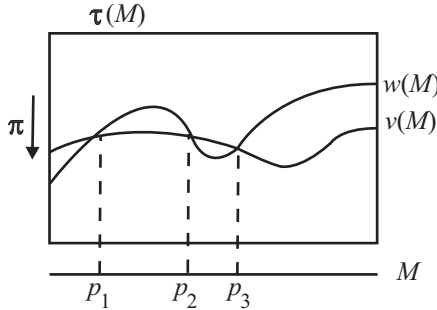
Definiremos agora o importante conceito de *número de interseção* de duas subvariedades, contidas numa variedade maior.

Sejam  $M^n$ ,  $S^s$  subvariedades compactas de uma variedade  $N^{m+s}$ , cuja dimensão é a soma das dimensões de  $M$  e  $S$ . Suporemos inicialmente, também, que  $M$ ,  $S$  e  $N$  são *orientadas*, e que  $M$  e  $S$  estão em *posição geral* em  $N$  (isto é, a aplicação de inclusão  $f: M \subset N$  é transversal a  $S$ ). Nestas condições,  $M \cap S$  é uma subvariedade fechada de dimensão 0 de  $M$ , donde  $M \cap S = \{p_1, \dots, p_r\}$  é formada por um número finito de pontos. Para definir o *número de interseção*  $M \# S$  das variedades  $M$  e  $S$  em  $N$ , a ordem (primeiro  $M$ , depois  $S$ ) é importante. Em muitos casos, teremos  $M \# S = -S \# N$ . Dado  $M \cap S = \{p_1, \dots, p_r\}$ , como  $M$  e  $S$  estão em posição geral, para cada  $i = 1, \dots, r$  temos  $N_{p_i} = M_{p_i} \oplus S_{p_i}$ . Diremos que o ponto  $p_i \in M \cap S$  é *positivo*, ou *negativo* (aqui a ordem  $(M, S)$  entra em jogo) conforme uma base positiva  $\{e_1, \dots, e_m\} \subset M_{p_i}$ , seguida de uma base positiva  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_s\} \subset S_{p_i}$ , dê origem a uma base positiva ou negativa  $\{e_1, \dots, e_m, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_s\}$  de  $N_{p_i}$ . Definiremos então  $M \# S$  como o número algébrico de pontos em  $M \cap S$ , isto é, o número de pontos positivos menos o número de pontos negativos em  $M \cap S$ . Vê-se que  $M \# S = (-1)^{ms} S \# M$ .

O leitor facilmente construirá exemplos onde se podem calcular números de interseção de curvas. (Atenção: em  $R^n$ , ou na esfera  $S^n$  ( $n > 1$ ) estes números serão sempre zero, em virtude do Teorema 5, juntamente com o fato

de que duas curvas quaisquer nestes espaços são sempre homotópicas a curvas disjuntas, sendo claro que  $M \cap S = \emptyset \Rightarrow M \# S = 0$ ). Uma variedade simples e interessante para esses exemplos é o toro.

Há um caso bastante importante, em que se pode definir o número de interseção  $M \# S$ , sem supor que  $M$  e  $S$  sejam orientáveis. É quando se tem dois campos vetoriais diferenciáveis  $v, w: M \rightarrow \tau(M)$ , sobre a variedade compacta  $M$ , a qual pode não ser orientável. Então  $v(M)$  e  $w(M)$  são subvariedades de variedade (sempre orientável, e naturalmente orientada!)  $\tau(M)$ , as quais suporemos estarem em posição geral. (No caso que nos interessa mais de perto, em que  $w - \theta =$  campo identicamente nulo, isto significará que as singularidades de  $v$  são todas simples). Então o conjunto  $v(M) \cap w(M)$  é finito e está em correspondência biunívoca com o conjunto  $\pi(v(M) \cap w(M)) = \{p_1, \dots, p_r\} \subset M$ . Os  $p_i$  são precisamente os pontos de  $M$  tais que  $v(p_i) = w(p_i)$ .



Diremos que um desses pontos  $p_i$  é *positivo* se, dada uma base qualquer  $\{e_1, \dots, e_m\} \subset M_{p_i}$ , o conjunto  $\{v_*(e_1), \dots, v_*(e_m), w_*(e_1), \dots, w_*(e_m)\}$ , assim ordenado, for uma base positiva em  $\tau(M)$ , no ponto  $v(p_i) = w(p_i)$ . Mudando a base em  $M_{p_i}$ , a nova base assim obtida em  $\tau(M)_{v(p_i)}$  difere

da anterior por uma matriz cujo determinante é o quadrado do determinante da mudança de base em  $M_{p_i}$ . Logo o conceito de “ponto positivo” é bem definido. Quando  $p_i$  não for positivo, diremos que ele é *negativo*.

Definiremos então  $v(M)\#w(M)$ , o número de interseção dessas duas subvariedades de  $\tau(M)$ , ou o *número de coincidências* dos dois campos vetoriais  $v$  e  $w$ , como o número algébrico de pontos em  $v(M) \cap w(M)$ , isto é, o número de pontos positivos  $p_i$  acima considerados, menos o número de pontos negativos. Em particular,  $v(M)\#\theta(M)$  é a soma dos índices das singularidades (supostas todas simples) do campo  $v$ , conforme definimos no parágrafo anterior.

Assim, o número de coincidências de dois campos vetoriais e mesmo a soma dos índices das singularidades (simples) de um campo, não é um caso particular da noção geral de número de interseção de duas subvariedades, exceto quando os campos vetoriais em questão acham-se definidos numa variedade orientável, pois o número de interseção só tem sentido, em geral, para subvariedades orientadas. Desenvolveremos aqui, apenas, considerações acerca do número de interseção de subvariedades. Assim, com todo o rigor, poderemos aplicar os resultados obtidos apenas para campos vetoriais sobre variedades (compactas) orientáveis. Entretanto, usaremos livremente esses resultados para campos vetoriais sobre quaisquer variedades compactas. Justificaremos o nosso procedimento com as seguintes ponderações:

1º) É fácil adaptar as demonstrações dadas, para o caso restante:

2º) Dado um campo vetorial  $v$  sobre uma variedade não orientável  $M$ , com singularidades todas simples, to-

mos o recobrimento duplo orientável  $\widetilde{M}$  de  $M$ . A  $v$  corresponde sobre  $\widetilde{M}$  um campo vetorial  $\widetilde{v}$ , cujas singularidades são também simples. Para cada singularidade  $p$  de  $v$  existem duas singularidades de  $\widetilde{v}$ , com o mesmo índice de  $p$ . Assim, a soma dos índices das singularidades de  $\widetilde{v}$ , isto é,  $\widetilde{v}(\widetilde{M})\#\theta(\widetilde{M})$ , é igual a  $2[v(M)\#\theta(M)]$ .

O fato principal a respeito do número de interseção  $M\#S$  é que ele permanece invariante quando se submete uma das subvariedades  $M$  ou  $S$  (ou ambas) a uma deformação em  $N$ . Para lidar com este problema convenientemente, e também para incluir a noção de grau de uma aplicação como caso particular da noção de número de interseção, vamos generalizar um pouco mais esta última noção.

Sejam então  $M^m$ ,  $S^s$ ,  $N^{m+s}$  variedades orientadas, as duas primeiras compactas, com  $S^s \subset N^{m+s}$ . Consideremos uma aplicação diferenciável  $f: M^m \rightarrow N^{m+s}$ , transversal à subvariedade  $S \subset N$ . Embora  $f(M)$  não seja necessariamente uma subvariedade de  $N$ , definiremos o *número de interseção*  $f(M)\#S$ , de modo análogo ao caso anterior. Pelo Corolário do Lema 3,  $f^{-1}(S)$  é uma subvariedade (fechada) de dimensão 0 de  $M$ . Logo consta de um número finito de pontos:  $f^{-1}(S) = \{p_1, \dots, p_r\}$ . Ponhamos  $q_i = f(p_i)$ . Para cada  $i$ , temos  $f_*(M_{p_i}) \oplus S_{q_i} = N_{q_i}$ , devido à transversalidade. Diremos que  $p_i$  é um ponto *positivo* ou *negativo* conforme a imagem por  $f_*$  de uma base positiva de  $M_{p_i}$ , seguida de uma base positiva de  $S_{q_i}$ , dê uma base positiva ou negativa de  $N_{q_i}$ . Definiremos  $f(M)\#S$  como o número algébrico de pontos de  $f^{-1}(S)$ .

Dada uma aplicação diferenciável  $f: M^m \rightarrow N^n$  ( $M, N$  compactas, orientáveis) e um ponto  $p \in N$ ,  $f$  é transversal

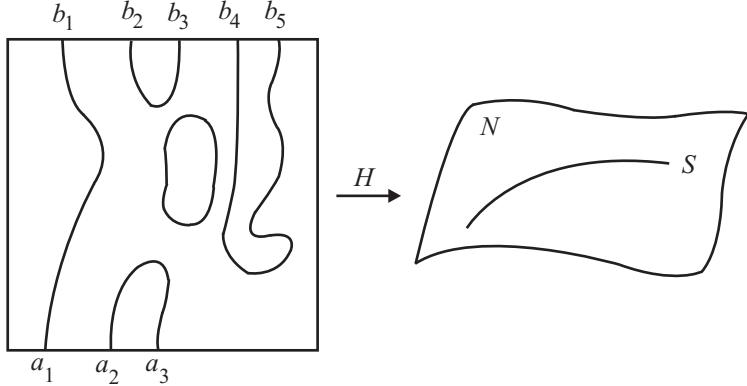


à subvariedade  $\{p\} \subset N$  se, e somente se,  $p$  é um valor regular de  $f$ . Neste caso, temos imediatamente  $\text{gr}_p(f) = f(M) \# \{p\}$ , o que inclui a noção de grau como caso particular deste conceito generalizado de número de interseção.

**Teorema 5.** *Sejam  $M^m$ ,  $S^s$ ,  $N^{m+s}$ , com  $S^s \subset N^{m+s}$ , variedades orientadas, as duas primeiras sendo compactas. Sejam  $f, g: M^m \rightarrow N^{m+s}$  aplicações diferenciáveis, transversais à subvariedade  $S$ . Se  $f$  e  $g$  são homotópicas, então  $f(M) \# S = g(M) \# S$ .*

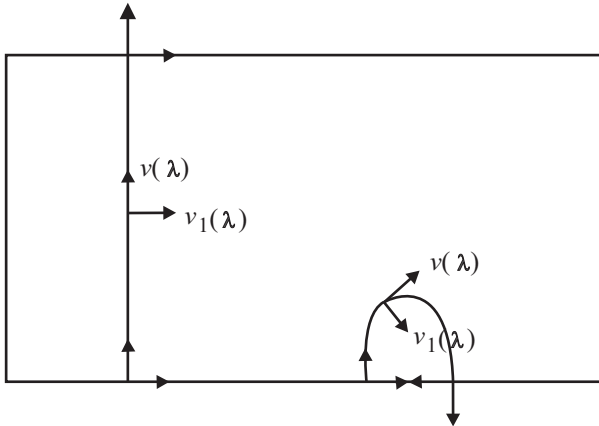
**Demonstração:** Seja  $F: M \times I \rightarrow N$  uma homotopia diferenciável entre  $f$  e  $g$ . Usando o Teorema 3, com  $X = (M \times 0) \cup (M \times 1)$  e, digamos,  $\varepsilon = 1$ , obtemos uma homotopia  $H: M \times I \rightarrow N$ , entre  $f$  e  $g$ , a qual é transversal a  $S$ . A imagem inversa  $H^{-1}(S)$  é uma subvariedade compacta, de dimensão 1, de  $M \times I$ , a qual possui, portanto, um número finito de componentes conexas, cada uma delas homeomorfa a um segmento de reta compacto ou a um círculo. Facilmente se vê (como na demonstração do Teorema 10, §6, Capítulo II) que estes “círculos” não têm pontos em comum com  $M \times 0$  nem com  $M \times 1$ , e que as extremidades desses “segmentos” formam precisamente o conjunto  $f^{-1}(S) \cup g^{-1}(S) = \{a_1, \dots, a_r\} \cup \{b_1, \dots, b_k\}$ . Assim, um segmento em  $H^{-1}(S)$  ou liga um ponto  $a_i$  a um ponto  $b_j$ , ou liga dois pontos  $a_i, a_j$  ou então liga um ponto  $b_i$  a um ponto  $b_j$ . Para mostrar que  $f(M) \# S = g(M) \# S$ , tudo o que nos resta fazer é provar que, se um segmento liga um ponto  $a_i$  a um ponto  $b_j$ , estes pontos têm o mesmo sinal e, nos outros dois casos, as extremidades  $(a_i, a_j)$ , ou  $(b_i, b_j)$  do segmento têm sinais opostos. Para isto, observemos inicialmente que cada um dos segmentos em questão é

transversal a  $M \times 0$  ou a  $M \times 1$  em suas extremidades (isto é, numa extremidade  $a_i$ , o vetor tangente do segmento não pode ser tangente a  $M \times 0$ , nem ser tangente a  $M \times 1$  numa extremidade  $b_j$ ).



Se uma tal coisa acontecesse, concluiríamos, por exemplo, que  $f_*(M_{a_i})$  teria um vetor não nulo em comum com  $S_{f(a_i)}$ , o que estaria em contradição com a transversalidade de  $f$ . Em seguida consideremos, para fixar as idéias, um segmento  $L$ , ligando  $a_i \in M \times 0$  a  $b_j \in M \times 1$ , em  $H^{-1}(S)$ . Seja  $L(\lambda)$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , uma parametrização de  $L$ , com  $L(0) = a_i$ ,  $L(1) = b_j$  e tal que  $v(\lambda)$ , o vetor tangente a  $L$  no ponto  $L(\lambda)$ , é sempre  $\neq 0$ . Consideremos também as famílias de vetores  $v_1(\lambda), \dots, v_m(\lambda)$ , dependendo diferenciavelmente de  $\lambda$ , tais que para cada  $\lambda$ ,  $\{v_1(\lambda), \dots, v_m(\lambda), v(\lambda)\}$  seja uma base positiva do espaço vetorial tangente a  $M \times I$  no ponto  $L(\lambda)$  e  $\{v_1(\lambda), \dots, v_m(\lambda)\}$  seja, para  $\lambda = 0$ , uma base de  $M_{a_i}$ , e para  $\lambda = 1$  uma base de  $M_{b_j}$ . (Estas duas “condições de contorno” podem ser satisfeitas porque, em suas extremidades,  $L$  é transversal

a  $M \times 0$  e  $M \times 1$ ). Então as bases  $\{v_1(0), \dots, v_m(0)\} \subset M_{a_i}$  e  $\{v_1(1), \dots, v_m(1)\} \subset M_{b_j}$  têm o mesmo sinal. (Se, pelo contrário, as extremidades de  $L$  fossem ambas do tipo  $a_i, a_j \in M \times 0$ , por exemplo, estas bases teriam sinais opostos” (Vide diagrama a seguir). Agora observemos o seguinte: em cada ponto  $L(\lambda) \in M \times I$ , pondo  $q = H(L(\lambda)) \in S$ , indicando com  $[H_*v_1(\lambda), \dots, H_*v_m(\lambda)]$  o subespaço de  $S_q$  gerado pelos vetores dentro dos colchetes, temos  $[H_*v_1(\lambda), \dots, H_*v_m(\lambda)] \oplus S_q = N_q$ , em virtude da transversalidade de  $H$ . Assim, os



vetores  $H_*(v_k(\lambda))$  nesta ordem, seguidos de uma base  $> 0$  de  $S_q$ , formam uma base de  $N_q$ , a qual tem o mesmo sinal para todo valor de  $\lambda$ , devido à conexidade de  $L$ . Tomando  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$ , notando que  $H_*(v_k(0)) = f_*(v_k(0))$ ,  $H_*(v_k(1)) = g_*(v_k(1))$ , e que as bases  $\{v_k(0)\} \subset M_{a_i}$  e  $\{v_k(1)\} \subset M_{b_j}$  têm o mesmo sinal, concluímos que os pontos  $a_i$  e  $b_j$  têm o mesmo sinal. De modo análogo raciocinaríamos nos dois casos restantes.

**Corolário 1.** *Sejam  $M^m, N^m$  variedades orientadas, onde  $M$  é compacta. Sejam  $f, g: M^m \rightarrow N^m$ , aplicações diferenciáveis que admitem o mesmo ponto  $p \in N$  como valor regular. Se  $f \simeq g$ , então  $\text{gr}_p(f) = \text{gr}_p(g)$ .*

**Corolário 2.** *Sejam  $M^m, N^m$  nas condições do Corolário 1, e  $f: M^m \rightarrow N^m$  diferenciável. Se  $N$  for conexa então, quaisquer que sejam  $p, q \in N$ , tem-se  $\text{gr}_p(f) = \text{gr}_q(f)$ .*

O argumento para demonstrar o Corolário 2 é o mesmo que serviu para deduzir do Teorema 10, §6, Capítulo II o seu Corolário. (Vide a Observação que segue aquele Corolário).

**Corolário 3.** *Seja  $M^m$  uma variedade compacta (orientável ou não) e  $y, w: X \rightarrow \tau(M)$  campos vetoriais diferenciáveis tais que as subvariedades  $v(M), w(M) \subset \tau(M)$  estão em posição geral. Então o número de coincidências  $v(M) \# w(M)$  não depende dos campos escolhidos  $v$  e  $w$ .*

Com efeito, seja  $v': M \rightarrow \tau(M)$  um novo campo diferenciável, ainda transversal a  $w(M)$ . A aplicação  $H: M \times I \rightarrow \tau(M)$  dada por  $H(p, t) = (1 - t)v(p) + tv'(p)$  é uma homotopia entre  $v$  e  $v'$ . Segue-se do Teorema 5, então que  $v(M) \# w(M) = v'(M) \# w(M)$ . Do mesmo modo raciocinaríamos com  $w$ .

**Teorema 6.** *Seja  $M$  uma variedade compacta. A soma dos índices de um campo vetorial diferenciável sobre  $M$  cujas singularidades são todas simples é um invariante de  $M$ , isto é, não depende da escolha do campo nestas condições.*

**Demonstração:** Isto decorre imediatamente do Corolário 3 pois se  $v: M \rightarrow \tau(M)$  é um campo diferenciável cujas

singularidades são todas simples então a soma dos índices das singularidades de  $v$  é igual ao número de coincidências  $v(M)\#\theta(M)$  de  $v$  com o campo vetorial identicamente nulo e este número, pelo Corolário 3, não depende do campo  $v$ .

**Corolário.** *Seja  $M^m$  uma variedade compacta de dimensão ímpar. Se um campo diferenciável  $v: M \rightarrow \tau(M)$  possui apenas singularidades simples, a soma dos índices dessas singularidades é igual a 0.*

Com efeito, pelo Teorema 6, a soma  $\Sigma$  dos índices das singularidades do campo  $-v$  é a mesma que de  $v$ . Mas as singularidades de  $-v$  são as mesmas que as de  $v$  e, numa destas singularidades  $p$  o índice em relação a  $v$  é o sinal de um determinante  $\det\left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right)$ , enquanto o índice em relação a  $-v$  é o sinal de  $\det\left(-\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right) = (-1)^m \det\left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right)$ . Logo  $\Sigma = (-1)^m \Sigma$ , donde  $\Sigma = 0$ .

Uma outra alternativa para demonstrar este Corolário é a seguinte:  $\Sigma = v(M)\#\theta(M) = (-1)^{m^2} \theta(M)\#v(M)$ . Por outro lado, sendo  $v \simeq \theta$ , temos  $v(M) \neq \theta(M) = \theta(M)\#v(M)$ . Como  $m$  é ímpar, vem  $\Sigma = 0$ .

## 4 A característica de Euler de uma variedade

Seja  $M$  uma variedade diferenciável compacta. No parágrafo anterior, mostramos que a soma dos índices das singularidades de um campo vetorial diferenciável sobre  $M$ , quando essas singularidades são todas simples, é um número inteiro intrinsecamente associado a  $M$ : não depende do campo

escolhido. A este número, chamaremos *característica de Euler* de  $M$  e o indicaremos com o símbolo  $\chi(M)$ .

O principal problema associado a esta definição consiste em calcular  $\chi(M)$  quando se têm informações sobre  $M$ . Neste parágrafo, apresentaremos uma breve discussão desse problema. Consideraremos uma série de casos.

1) *A esfera  $S^n$* . Quando  $n$  é ímpar,  $\chi(S^n) = 0$ . Quando  $n$  é par,  $\chi(S^n) = 2$ . Com efeito, para  $n$  ímpar existe sobre  $S^n$  um campo vetorial diferenciável sem singularidades (Teorema de Poincaré-Brouwer). Para  $n$  par, foi construído sobre  $S^n$  (§2) um campo diferenciável com duas singularidades simples, ambas com índice igual a 1.

2) *Variedades de dimensão ímpar*. Se  $M^m$  é uma variedade compacta cuja dimensão  $m$  é um número ímpar, então  $\chi(M) = 0$ , conforme resulta do §3.

3) *Variedades desconexas*. Se  $M^m = M_1^m \cup \dots \cup M_k^m$  é uma reunião disjunta de variedades compactas, então  $\chi(M) = \chi(M_1) + \dots + \chi(M_k)$ . Em particular, se  $M$  é uma variedade compacta de dimensão 0, formada por  $k$  pontos, então  $\chi(M) = k$ .

4)  $\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N)$ . Seja  $M^m \times N^n$  o produto cartesiano de duas variedades compactas  $M^m$  e  $N^n$ . Dados os campos vetoriais diferenciáveis  $u$  sobre  $M$  e  $v$  sobre  $N$ , cujas singularidades são todas simples, seja  $w = u \times v$  o campo vetorial, sobre  $M \times N$ , tal que, para todo  $(p, q) \in M \times N$ ,  $w_{(p,q)} = u_p \oplus v_q \in (M \times N)_{(p,q)} = N_p \oplus N_q$ . As singularidades de  $w$  são os pontos  $(p, q) \in M \times N$  tais que  $p$  é uma singularidade de  $u$  e  $q$  é uma singularidade de  $v$ . Cada singularidade  $(p, q)$  de  $w$  é simples, como se verifica imediatamente através do critério de determinantes introduzidos

no §2. Realmente se  $x$  e  $y$  são sistemas de coordenadas em  $M$  e  $N$ , válidos em torno de  $p$  e  $q$  respectivamente, então  $z = x \times y$  é um sistema de coordenadas em  $M \times N$ , válido em torno de  $(p, q)$ . Sejam  $u = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  a expressão do campo  $u$  no sistema  $x$ , e  $v = \sum b^j \frac{\partial}{\partial y^j}$  a expressão de  $v$  no sistema  $y$ . Como  $\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}$  ( $k = 1, \dots, m$ ),  $\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{\partial}{\partial y^{k-m}}$  ( $k = m+1, \dots, m+n$ ), temos  $w = \sum c^k \frac{\partial}{\partial z^k}$ , com  $c^k = a^k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) e  $c^k = b^{k-m}$  ( $k = m+1, \dots, m+n$ ). Por conseguinte, a matriz  $\left(\frac{\partial c^k}{\partial z^i}\right)$  assume a forma

$$\left(\frac{\partial c^k}{\partial z^i}\right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial b^i}{\partial y^i}\right) \end{pmatrix},$$

donde  $\det\left(\frac{\partial c^k}{\partial z^i}\right) = \det\left(\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\right) \cdot \det\left(\frac{\partial b^i}{\partial y^j}\right)$ . Sendo  $p$  e  $q$  singularidades simples, segue-se que  $\det\left(\frac{\partial c^k}{\partial z^i}\right) \neq 0$ , donde  $(p, q)$  é uma singularidade simples de  $w$ . Além disso, se indicarmos com  $p_1, \dots, p_r$  as singularidades de  $u$ , com  $q_1, \dots, q_s$  as singularidades de  $v$ , com  $\xi_i$  o índice de  $p_i$ , com  $\eta_j$  o índice de  $q_j$  e com  $\varepsilon_{ij}$  o índice de  $(p_i, q_j)$ , a expressão acima mostra que  $\varepsilon_{ij} = \xi_i \cdot \eta_j$  para todos os valores de  $i$  e  $j$  em consideração. Logo

$$\begin{aligned} \chi(M \times N) &= \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} = \sum_{i,j} \xi_i \cdot \eta_j = \sum_j \left( \sum_i \xi_i \right) \eta_j \\ &= \sum_j \chi(M) \cdot \eta_j = \chi(M) \cdot \sum_j \eta_j \\ &= \chi(M) \cdot \chi(N). \end{aligned}$$

Assim, por exemplo, como  $\chi(S^1) = 0$  e o toro  $T^2$  é igual a  $S^1 \times S^1$ , temos  $\chi(T^2) = 0 \times 0 = 0$ .

5) *Espaços de recobrimento.* Sejam  $M^m, N^m$  variedades compactas, de mesma dimensão  $m$ , e  $\pi: M^m \rightarrow N^m$  uma aplicação diferenciável tal que  $\pi_*: M_p \approx N_q$  ( $q = \pi(p)$ ) é sempre um isomorfismo. Daí resulta (use o Escólio que segue o Lema 4, do Capítulo II) que, para  $N$  conexa, a imagem inversa  $\pi^{-1}(q)$  de cada ponto  $q \in N$  possui o mesmo número  $k$  de elementos. Diz-se então que  $\pi: M \rightarrow N$  é um “recobrimento com  $k$  folhas”. Afirmamos que, neste caso, tem-se  $\chi(M) = k \cdot \chi(N)$ . Com efeito, seja  $u$  um campo vetorial sobre  $N$ , cujas singularidades  $q_1, \dots, q_r$  são todas simples. Seja  $\varepsilon_i$  o índice da singularidade  $q_i$ . Temos  $\chi(N) = \sum \varepsilon_i$ . Construamos um campo vetorial  $v$  sobre  $M$  pondo  $v_p = (\pi_*)^{-1}(u_q)$ , para todo  $p \in M$ , onde  $q = \pi(p)$ . É imediato que  $v$  é um campo diferenciável sobre  $M$  (use o Lema 4, Capítulo II), cujas singularidades são os pontos  $p_{ij}$  tais que  $\pi(p_{ij}) = q_i$  ( $i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, k$ ). Vê-se também que o índice de cada  $p_{ij}$  é igual ao índice de  $q_i = \pi(p_{ij})$ . Resulta daí que a soma dos índices dos  $p_{ij}$  é igual a  $\chi(M) = k \cdot \sum \varepsilon_i = k \cdot \chi(N)$ . Por exemplo, a projeção canônica  $\pi: S^n \rightarrow P^n$ , da esfera  $S^n$  sobre o espaço projetivo  $P^n$ , é um recobrimento de duas folhas. Logo,  $\chi(P^n) = \frac{1}{2} \chi(S^n) = 1$  se  $n$  é par e  $= 0$  se  $n$  é ímpar.

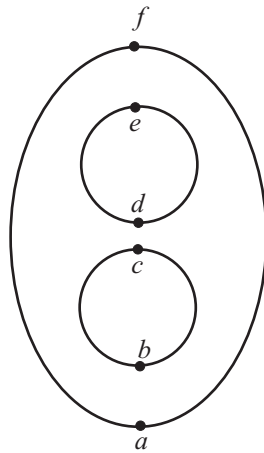
6) *Espaços fibrados.* Este exemplo incluirá como casos particulares os exemplos 4) e 5). Seja  $\pi: M^m \rightarrow N^n$  uma fibração diferenciável, com fibra típica  $F^{m-n}$ , sendo  $M, N, F$  variedades compactas. Afirmamos que  $\chi(M) = \chi(N) \cdot \chi(F)$ . Com efeito, sejam  $u$ , sobre  $N$ , e  $v$ , sobre  $F$ , campos vetoriais diferenciáveis cujas singularidades  $p_1, \dots, p_r \in N$  e  $q_1, \dots, q_s \in F$  são todos simples. Seja  $\{V_\alpha\}$  ( $\alpha = 1, \dots, r$ ) uma cobertura finita de  $N$  tal que cada singularidade de  $u$  pertence a um aberto  $V_\alpha$  somente e, para cada  $\alpha$ , existe



um difeomorfismo  $\lambda_\alpha: \pi^{-1}(V_\alpha) \approx V_\alpha \times F$ . Seja ainda  $\{\varphi_\alpha\}$  uma partição da unidade subordinada a cobertura  $\{V_\alpha\}$ . Para cada  $\alpha = 1, \dots, r$ , consideremos o campo  $w_\alpha = u \times v$  sobre  $V_\alpha \times F$ , construído como no exemplo 4), a partir dos campos  $u$ , sobre  $V_\alpha$ , e  $v$ , sobre  $F$ . Definamos, em seguida, um campo vetorial diferenciável  $w$ , sobre  $M$ , pondo, para cada  $p \in M$ ,  $w_p = \sum_\alpha \varphi_\alpha(\pi(p)) \cdot (w_\alpha)_q$ ,  $q = \lambda_\alpha(p)$ . As singularidades de  $w$  são os pontos  $p \in M$  tais que  $a = \pi(p)$  é uma singularidade de  $u$  (que pertence a uma única  $V_\alpha$ ) e  $\lambda_\alpha(p) = (a, b)$ , onde  $b \in F$  é uma singularidade de  $v$ . Pelo que vimos no exemplo 4), vê-se que  $p$  é simples e seu índice é o produto do índice de  $a$  pelo índice de  $b$ . Conclui-se sem dificuldade que  $\chi(M) = \chi(N) \cdot \chi(F)$ . Assim, por exemplo, se  $N^n \subset R^{n+k+1}$  é uma subvariedade compacta e  $T_{2\varepsilon}(N)$  é uma vizinhança tubular de  $N$  com amplitude  $4\varepsilon$  (i.e., raio  $2\varepsilon$ ), seja  $M = \partial T_\varepsilon(N) =$  fronteira de  $T_\varepsilon(N)$  em  $T_{2\varepsilon}(N) =$  conjunto dos pontos  $p \in T_{2\varepsilon}(N)$  tais que  $|p - \pi(p)| = \varepsilon$ . Então a projeção  $\pi$ , restrita a  $M$ , define uma fibração  $\pi: M \rightarrow N$  cuja fibra típica é a esfera de raio  $\varepsilon$  e dimensão  $k$ .  $M$  identifica-se canonicamente com o espaço fibrado dos vetores unitários normais a  $N$  em  $R^{n+k+1}$ . Temos então  $\chi(M) = \chi(N) \cdot \chi(S^k)$ . Logo  $\chi(M) = 2\chi(N)$  se  $k$  é par, e  $\chi(M) = 0$  se  $k$  é ímpar.

7) *Superfícies compactas.* Seja  $M^2$  uma superfície compacta orientável, de gênero  $g$ . Isto é,  $M^2$  é uma esfera com  $g$  buracos. Afirmamos que  $\chi(M^2) = 2 - 2g$ . Para isto, imaginemos  $M^2$  colocada “verticalmente” em  $R^3$  e consideremos sobre  $M^2$  o campo vetorial dado pelo gradiente da função altura (a função  $\varphi: M^2 \rightarrow R$  tal que  $\varphi(p) = z$ , onde  $p = (x, y, z) \in R^3$ ). Na figura da página seguinte,

temos uma superfície de gênero 2 (dois “buracos”) situada verticalmente em  $R^3$ . Os pontos  $a, b, c, d, e, f$  assinalados são as singularidades do gradiente da função altura. Como se sabe, o vetor gradiente é perpendicular, em cada ponto à curva de nível que passa por aquele ponto. Neste caso, as curvas de nível são simplesmente as interseções de  $M^2$  com os vários planos horizontais. Vê-se portanto que as singu-

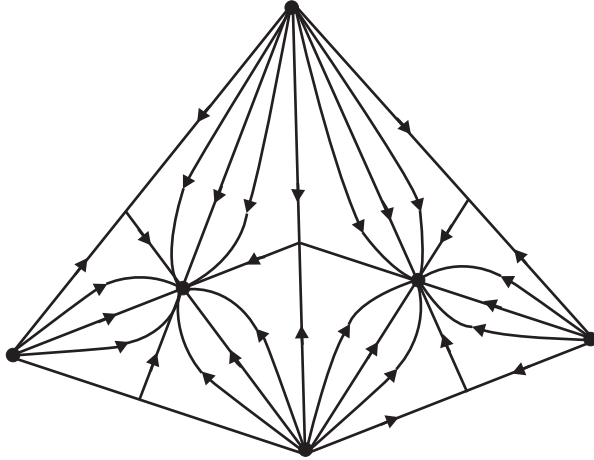


laridades  $a$  e  $f$  têm índice 1 e as demais (que são “pontos de sela”) têm índice  $-1$ . Logo  $\chi(M) = -2 = 2 - 2g$ . Este raciocínio é geral, aplicando-se a uma superfície compacta orientável, de gênero  $g$  arbitrário. Quando  $M^2$  não é orientável, temos  $\chi(M^2) = \frac{1}{2} \chi(\tilde{M}^2)$ , onde  $\tilde{M}^2$  é o recobrimento duplo orientável de  $M^2$ . Este processo nos dá novamente que as características de Euler da esfera  $S^2$  e do toro  $T^2$  são 2 e 0 respectivamente. O plano projetivo  $P^2$  e a garrafa de Klein  $K^2$ , admitindo, respectivamente,  $S^2$  e  $T^2$  como recobrimento duplo orientável, têm características de Euler iguais a 1 e 0, respectivamente. Estas são as únicas

superfícies compactas com  $\chi(M) \geq 0$ . Para as demais,  $g > 1$ , donde  $\chi(M) = 2 - 2g < 0$  (caso orientável) ou  $\chi(M) = 1 - g < 0$  (caso não orientável).

7\*) *Superfícies compactas: novo método.* Seja  $M^2$  uma superfície compacta. Desta vez não distinguiremos o caso orientável do não orientável. Consideremos uma “triangulação” de  $M^2$ , isto é, uma coleção de triângulos curvilíneos (imagens difeomorfas de triângulos do plano) que cobrem  $M^2$ , de tal modo que dois quaisquer deles, ou não se interesetam, ou têm somente um vértice em comum, ou então têm precisamente um lado em comum. Seja  $\alpha^0$  o número de vértices,  $\alpha^1$  o número de arestas (lados dos triângulos) e  $\alpha^2$  o número de faces (triângulos) desta triangulação. Vamos definir um campo vetorial  $v$  sobre  $M^2$  e mostrar que a soma dos índices das singularidades de  $v$  é igual a  $\alpha^0 - \alpha^1 + \alpha^2$ . Assim, qualquer que seja a triangulação de  $M^2$ , teremos  $\chi(M^2) = \alpha^0 - \alpha^1 + \alpha^2$ . Na esfera  $S^2$ , usando a notação clássica da Geometria Elementar:  $V = \alpha^0$ ,  $A = \alpha^1$ ,  $F = \alpha^2$ , obteremos  $V - F + A = 2$ , que é o teorema clássico de Euler para poliedros, justificando assim o nome dado a  $\chi(M)$ . Passemos então a construir o campo  $v$ , associado à triangulação de  $M^2$ . Em vez de definir  $v$  explicitamente, daremos as suas curvas integrais, devidamente orientadas, o que vem a ser o mesmo. Começamos subdividindo baricentricamente cada triângulo de  $M^2$ . (Isto é, subdividimos cada triângulo de  $M^2$  em 6 outros, traçando suas 3 medianas). Em seguida, enchamos cada triângulo com as linhas integrais do campo. Cada linha integral parte sempre do centro de um elemento de dimensão menor para o centro de um elemento de dimensão maior: de um vértice para o meio de um lado, de um vértice para o

centro do triângulo, ou do meio de um lado para o centro do triângulo. (Vide figura).



Cada elemento (vértice, aresta ou face) contribui precisamente com uma singularidade do campo. O centro deste elemento é um ponto singular. Assim, o campo  $v$  terá  $\alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2$  singularidades. Acontece, porém, que num vértice as curvas integrais todas saem daquele ponto. Já no centro de um triângulo, todas as curvas integrais entram. Em qualquer destes dois casos, o índice da singularidade é 1. No meio de um lado, porém, há curvas integrais que entram e outras que saem. Tem-se aí um ponto de sela clássico. (Vide, por exemplo Hurewicz “Differential Equations”). Então o índice desse ponto é  $-1$ . Assim, a soma dos índices das singularidades do campo  $v$  é igual a  $\alpha^0 - \alpha^1 + \alpha^2$ .

8) *Primeira expressão geral.* A teoria da homologia ensina a associar a cada variedade compacta  $M^n$ , números

inteiros  $\geq 0$   $b_0, b_1, \dots, b_n$ . Cada  $b_i$  é chamado o *número de Betti de dimensão  $i$* . (Veja [21]). Tem-se então  $\chi(M) = \sum (-1)^i b_i$ . Há várias maneiras de demonstrar esta fórmula, mas nenhuma delas pode ser exposta com todos os detalhes aqui, pois são necessários os recursos da teoria da homologia. Esboçaremos dois métodos de demonstração. O primeiro utiliza a Teoria de Morse. Existe pelo menos uma função real diferenciável  $f: M \rightarrow R$  cujo campo gradiente (relativamente a uma métrica riemanniana arbitrária) só admite singularidades simples. Na realidade, o conjunto destas funções é denso na topologia  $C^1$  das funções reais diferenciáveis em  $M$ . (Vide [19] pag. 30). A teoria de Morse implica que a soma dos índices das singularidades deste campo vetorial gradiente é igual a  $\sum (-1)^i b_i$ . (Vide [14], pag. 117). Logo,  $\chi(M) = \sum (-1)^i b_i$ . O segundo método de demonstração utiliza o teorema dos pontos fixos de Lefschetz. (Vide [21], último capítulo). Segundo este teorema, a cada ponto fixo isolado de uma aplicação contínua  $f: M \rightarrow M$ , associa-se um número, chamado o *índice* do ponto fixo, de tal modo que, se  $f \simeq$  identidade, então a soma dos índices dos pontos fixos de  $f$  é igual a  $\sum (-1)^i b_i$ . Ora, um campo vetorial  $v$  sobre  $M$ , cujas singularidades são todas simples, determina um grupo  $\{\varphi_t; t \in R\}$  de difeomorfismos de  $M$  (vide §1), todos homotópicos à identidade. Existe um  $t$  tal que os únicos pontos fixos de  $\varphi_t: M \rightarrow M$  são as singularidades de  $v$ . O índice de uma singularidade  $p \in M$  coincide com o índice do ponto fixo  $p$  de  $\varphi_t$ . Logo, a soma dos índices das singularidades de  $v$  é igual a  $\sum (-1)^i b_i$ .

Entre o exemplo 8) e o seguinte, observamos que os números de Betti são definidos para uma classe de espaços

topológicos muito mais geral do que a classe das variedades diferenciáveis compactas e, para um espaço  $X$  desta classe, a expressão  $\chi(X) = \sum (-1)^i b_i$  serve de definição para a característica de Euler.

8\*) *Segunda expressão geral.* Assim como o exemplo 8) constitui-se uma generalização direta do exemplo 7), este exemplo será uma generalização do cálculo feito em 7\*). Não somente as superfícies compactas, mas todas as variedades diferenciáveis compactas  $M^n$  podem ser trianguladas. Para uma demonstração deste fato, veja-se [25], pags. 124 e 135. Dada uma triangulação de  $M^n$ , indiquemos com  $\alpha^i$  o número de faces de dimensão  $i$  dessa triangulação ( $i = 1, \dots, n$ ). Utilizando um processo inteiramente análogo ao de 7\*), constrói-se sobre  $m$  um campo vetorial diferenciável, cujas singularidades, todas simples, são os baricentros das faces da triangulação. E a singularidade correspondente a uma face de dimensão  $i$  tem índice  $(-1)^i$ . Segue-se que a soma dos índices das singularidades de  $v$ , ou seja  $\chi(M)$ , é igual a  $\sum (-1)^i \alpha^i$ . Em particular, tem-se  $\sum (-1)^i \alpha^i = \sum (-1)^i b_i$ , resultado que, de resto, é válido para todos os espaços trianguláveis. Para maiores detalhes a respeito da construção do campo  $v$  neste caso geral, veja-se [22], pag. 202.

9) *Hipersuperfícies.* Mostraremos, no capítulo seguinte, que se  $M^n$  é uma variedade compacta que pode ser imersa em  $R^{n+1}$  (ou seja, se  $M^n$  é uma hipersuperfície) então  $\chi(M^n)$  é um número par. Com efeito, teremos  $\chi(M^n) = 0$  se  $n$  for ímpar e  $\chi(M^n) = 2$  vezes o grau da aplicação normal de Gauss, para  $n$  par.

## 5 A noção de grau local

Desejamos estender o conceito de índice de uma singularidade de um campo vetorial, a fim de abranger todas as singularidades isoladas, sejam elas simples ou não. O índice agora poderá assumir qualquer valor inteiro, e será definido como o “grau local” de uma certa aplicação associada ao campo. No caso de uma singularidade simples, o índice terá o valor  $\pm 1$ , e coincidirá com o já definido no §2.

Trataremos, neste parágrafo, do conceito de grau local.

Sejam  $X, Y$  espaços topológicos. Uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow Y$  diz-se uma *equivalência homotópica* quando existe uma aplicação contínua  $g: Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f \simeq \text{id}: X \rightarrow X$  e  $f \circ g \simeq \text{id}: Y \rightarrow Y$ . Neste caso,  $g$  chama-se uma *equivalência inversa* de  $f$  e os espaços  $X, Y$  dizem-se ter o mesmo *tipo de homotopia*.

Por exemplo, dado  $a \in R^n$ , seja  $B = B^n(a; \varepsilon)$  a bola fechada de centro  $a$  e raio  $\varepsilon > 0$  em  $R^n$ . Afirmamos que  $B - a$  e a esfera unitária  $S^{n-1}$  têm o mesmo tipo de homotopia. Com efeito, sejam  $\rho = \rho_{a, \varepsilon}: B - a \rightarrow S^{n-1}$  e  $j = j_{a, \varepsilon}: S^{n-1} \rightarrow B - a$  as aplicações definidas por

$$\rho(x) = \frac{x - a}{|x - a|}, \quad j(y) = a + \varepsilon y.$$

Temos  $\rho \circ j = \text{id}: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  e também  $j \circ \rho \simeq \text{id}: B - a \rightarrow B - a$ . Para verificar este último fato, basta considerar a homotopia  $F: (B - a) \times I \rightarrow B - a$ , onde

$$F(x, t) = (1 - t) \left( a + \varepsilon \cdot \frac{x - a}{|x - a|} \right) + tx.$$

Fazendo  $\varepsilon = \infty$  no exemplo acima, obtemos  $B = R^n$ . Continuamos tendo  $R^n - a$  e  $S^{n-1}$  do mesmo tipo de homo-

topia; a equivalência homotópica  $\rho = \rho_{a,\infty}: R^n - a \rightarrow S^{n-1}$  define-se do mesmo modo, mas sua inversa  $j = j_{a,\infty}: S^{n-1} \rightarrow R^n - a$  é definida por  $j(y) = a + y$ .

Usaremos consistentemente as notações acima introduzidas. Dadas várias bolas  $B, B', B'',$  etc., escreveremos  $j, j', j'', \rho, \rho', \rho'',$  etc. para indicar as equivalências homotópicas correspondentes.

Sejam agora  $U \subset R^n$  um aberto,  $a \in U, b \in R^n$ , e  $f: U - a \rightarrow R^n - b$  uma aplicação contínua tal que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ . Nestas condições, definiremos o *grau local*  $\gamma_a(f)$ , da aplicação  $f$  no ponto  $a$ , do seguinte modo:

Escolhemos uma bola fechada  $B = B^n(a; \varepsilon) \subset U$  e consideremos as equivalências homotópicas  $j = j_{a,\varepsilon}: S^{n-1} \rightarrow B - a, \rho' = \rho_{b,\infty}: R^n - b \rightarrow S^{n-1}$ , há pouco introduzidas

$$S^{n-1} \xrightarrow{j} B - a \xrightarrow{f} R^n - b \xrightarrow{\rho'} S^{n-1}.$$

Pomos  $\gamma_a(f) = \text{gr}(\rho' \circ f \circ j) = \text{grau (global) da aplicação composta } \rho' \circ f \circ j: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ .

Devemos mostrar que  $\gamma_a(f)$  não depende da escolha da bola fechada  $B = B^n(a; \varepsilon) \subset U$ . Com efeito, seja  $B'' = B^n(a; \varepsilon'') \subset U$ . Suponhamos que  $\varepsilon'' \leq \varepsilon$ . Então  $B'' \subset B$ . Seja  $k: B'' - a \rightarrow B - a$  a aplicação de inclusão. É óbvio que  $k \circ j'' \simeq j: S^{n-1} \rightarrow B - a$ .

$$\begin{array}{ccccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{j} & B-a & \xrightarrow{f} & R^n - b & \xrightarrow{\rho'} & S^{n-1} \\ & \searrow j'' & \uparrow k & & & & \\ & & B''-a & & & & \end{array}$$

Como  $f \circ k: B'' - a \rightarrow R^n - b$  é simplesmente a restrição de  $f$  a  $B'' - a$ , o grau local de  $f$ , definido por meio da bola  $B''$



em vez de  $B$ , é o grau da aplicação  $\rho'fkj'' : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ . Mas  $\rho'fkj'' \simeq \rho'fj$ , donde  $\text{gr}(\rho'fkj'') = \text{gr}(\rho'fj) = \text{grau local de } f$ , definido por meio da bola  $B$ .

**Observações:** 1) O grau local  $\gamma_a(f)$  depende somente do comportamento de  $f$  numa vizinhança arbitrariamente pequena do ponto  $a$ . Mais precisamente, se  $U, V \subset R^n$  são abertos contendo  $a$ , e  $f: U - a \rightarrow R^n - b$ ,  $g: V - a \rightarrow R^n - b$  são aplicações contínuas tais que  $f|_W = g|_W$  para  $W$  aberto e  $a \in W \subset U \cap V$ , então  $\gamma_a(f) = \gamma_a(g)$ . Basta, na definição de grau local, tomar a bola  $B$  não pequena que  $B \subset W$  e usá-la para calcular  $\gamma_a(f)$  e  $\gamma_a(g)$ .

2) Se  $f \simeq g: U - a \rightarrow R^n - b$ , então  $\gamma_a(f) = \gamma_a(g)$ . Com efeito, temos então  $f \simeq g: B - a \rightarrow R^n - b$ , donde  $\rho'fj = \rho'gj$  e daí  $\gamma_a(f) = \text{gr}(\rho'fj) = \text{gr}(\rho'gj) = \gamma_a(g)$ .

**Teorema 7.** *Sejam  $U, V \subset R^n$  abertos,  $a \in U$ ,  $b \in V$ ,  $c \in R^n$ ,  $f: U - a \rightarrow R^n - b$ ,  $g: V - b \rightarrow R^n - c$  contínuas, com  $f(U - a) \subset V - b$ . Então  $\gamma_a(g \circ f) = \gamma_b(g) \cdot \gamma_a(f)$ .*

**Demonstração:** Tomemos  $B'' = B^n(b; \varepsilon'') \subset V$  e, em seguida,  $B = B^n(a; \varepsilon) \subset U$  tal que  $f(B) \subset B''$ . Então  $\gamma_a(g \circ f) = \text{gr}(\rho'gfj)$

$$\begin{array}{ccccccc} S^{n-1} & \xrightarrow{j} & B-a & \xrightarrow{f} & B''-b & \xrightarrow{g} & R^n-c & \xrightarrow{p'} & S^{n-1} \\ & & & & \rho'' \updownarrow j'' & & & & \\ & & & & S^{n-1} & & & & \end{array}$$

Sejam  $\rho'': B'' - b \rightarrow S^{n-1}$  e  $j': S^{n-1} \rightarrow B'' - b$  as equivalências homotópicas naturais. Então  $j'\rho'' \simeq \text{id}: B'' - b \rightarrow B'' - b$ , donde  $\rho'gfj \simeq \rho'gj''\rho''fj$  e portanto  $\text{gr}(\rho'gfj) =$

$\text{gr}(\rho'gj'') \cdot \text{gr}(\rho''fj)$ , pelo Teorema 4, Capítulo II. Ora,  $\gamma_b(g) = \text{gr}(\rho'gj'')$ , enquanto  $\gamma_a(f) = \text{gr}(\rho''fj)$ , onde  $\rho'': R^n - b \rightarrow S^{n-1}$ . Mas é claro que  $\rho'' = \rho'''|_{B'' - b}$ , donde  $\rho''fj = \rho'''fj$  e daí  $\gamma_a(f) = \text{gr}(\rho''fj)$ . Concluimos que  $\gamma_a(g \circ f) = \gamma_b(g) \cdot \gamma_a(f)$ .

**Corolário.** *Se  $f: U - a \rightarrow R^{n-b}$  aplica  $W - a$  homeomorficamente sobre  $V - b$  (onde  $W, V$ , são abertos, com  $a \in W \subset U$  e  $b \in V$ ) então  $\gamma_a(f) = \pm 1$ .*

**Exemplos:** 1) Considerando cada ponto  $z = (x, y) \in R^2$  como um número complexo  $z = x + iy$ , seja  $f: R^2 - 0 \rightarrow R^2 - 0$  definida por  $f(z) = z^k$ . Então  $\gamma_0(f) = k$ . Com efeito, tomando  $B = B(0; 1)$ , temos  $j(z) = z$ , donde  $\rho'fj: S^1 \rightarrow S^1$  é a restrição de  $f$  a  $S^1$ . Logo  $\text{gr}(\rho'fj) = k$ , cfr. Exemplo 2, §3, Cap. II.

2) Seja  $f: R^n \rightarrow R^n$  uma aplicação linear invertível. Então  $f(R^n - 0) = R^n - 0$ . Calculemos o grau local  $\gamma_0(f)$ . Mostraremos que  $\gamma_0(f) = 1$  se  $\det(f) > 0$  e  $\gamma_0(f) = -1$  se  $\det(f) < 0$ . Com efeito, se  $\det(f) > 0$ , então  $f$  pertence à componente conexa da identidade em  $\text{Gl}(n, R)$  e então existe uma aplicação contínua  $t \rightarrow f_t$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $f_t \in \text{Gl}(n, R)$ , com  $f_0 = f$ ,  $f_1 = \text{id}: R^n \rightarrow R^n$ . Cada aplicação linear  $f_t$ , sendo invertível, é tal que  $f_t(R^n - 0) \subset R^n - 0$ . Temos assim uma homotopia  $f \simeq \text{id}: R^n - 0 \rightarrow R^n - 0$ , donde  $\gamma_0(f) = \gamma_0(\text{id}) = 1$ , em virtude da Observação 2 acima. Por outro lado, se  $\det(f) < 0$ , seja  $\lambda: R^n - 0 \rightarrow R^n - 0$  a reflexão relativamente ao hiperplano  $x^n = 0$ . Então  $\gamma_0(\lambda) = -1$  e, como  $\det(\lambda f) > 0$ , temos  $1 = \gamma_0(\lambda f) = \gamma_0(\lambda)\gamma_0(f) = -\gamma_0(f)$  e portanto  $\gamma_0(f) = -1$ .

3) Seja  $f: U \rightarrow R^n$  diferenciável,  $a \in U$ ,  $b = f(a)$ . Suponhamos que  $f(U - a) \subset R^n - b$ , de modo que podemos

falar no grau local  $\gamma_a(f)$  da aplicação  $f: U - a \rightarrow R^n - b$ . Admitamos agora que a aplicação linear  $f_*: R^n \rightarrow R^n$ , induzida por  $f$  no ponto  $a$ , é invertível. Ou seja,  $\det(f_*) \neq 0$  no ponto  $a$ . Então  $f$  aplica homeomorficamente uma vizinhança de  $a$  sobre uma vizinhança de  $b$ . Pelo Corolário do Teorema 7, concluímos que  $\gamma_a(f) = \pm 1$ . Mostraremos agora que  $\gamma_a(f) = 1$  se o jacobiano  $\det(f_*)$  é  $> 0$  e  $\gamma_a(f) = -1$  se  $\det(f_*) < 0$ . Tendo em conta o exemplo anterior, basta mostrar que  $\gamma_a(f) = \gamma_0(f_*)$ , onde  $f_*: R^n - 0 \rightarrow R^n - 0$ . Consideraremos primeiramente o caso em que  $a = 0$  e  $f(a) = 0$ . Então repetiremos (com mais detalhes) um argumento usado no Lema 7, Cap. II. Seja

$$A = \inf\{|f_*(u)|; u \in R^n, |u| = 1\}.$$

Então  $A > 0$ . Sabe-se que, numa vizinhança de 0, pode-se escrever:

$$f(x) = f_*(x) + \sigma(x), \text{ onde } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sigma(x)|}{|x|} = 0.$$

Seja  $W$  aberto, com  $0 \in W \subset U$ , e tal que

$$\frac{|\sigma(x)|}{|x|} < A, \text{ para todo } x \in W, x \neq 0.$$

Então, quaisquer que sejam  $x \in W - 0$  e  $0 \leq t \leq 1$ , temos

$$\begin{aligned} (1-t)f(x) + tf_*(x) &= (1-t)f_*(x) + (1-t)\sigma(x) + tf_*(x) \\ &= f_*(x) + (1-t)\sigma(x) = |x| \left[ f_* \left( \frac{x}{|x|} \right) + (1-t) \frac{\sigma(x)}{|x|} \right] \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, podemos definir uma homotopia  $F: (W - 0) \times I \rightarrow R^n - 0$  entre as restrições  $f, f_*: W - 0 \rightarrow R^n - 0$ , pondo

$$F(x, t) = (1-t)f(x) + tf_*(x).$$

Segue-se das Observações 1) e 2) acima que  $\gamma_0(f) = \gamma_0(f_*) = \pm 1$  (conforme seja  $\det(f) > 0$  ou  $< 0$ ). O caso geral, em que  $a \in U$  é um ponto qualquer e  $b = f(a)$  pode ser  $\neq 0$ , reduz-se ao anterior mediante as translações  $\varphi: x \rightarrow x - a$  e  $\psi: y \rightarrow y - b$ , as quais têm, evidentemente, grau local 1.

**Teorema 8.** *Sejam  $U \subset R^n$  um aberto,  $a \in U$ ,  $f: U - a \rightarrow R^n - b$  contínua. Então  $\gamma_a(f) = 0$  se, e somente se, para toda bola fechada  $B = B^n(a, \varepsilon) \subset U$ , existe uma aplicação contínua  $g: U \rightarrow R^n - b$  que coincide com  $f$  em  $U - \text{int}B$ .*

**Demonstração:** Se existe  $g: U \rightarrow R^n - b$  contínua, com  $g(x) = f(x)$  para todo  $x \in U - \text{int}B$ , consideremos a aplicação usual  $j = j_{a,\varepsilon}: S^{n-1} \rightarrow B - a$  e chamemos de  $B'' = B^n(0, 1)$  a bola fechada unitária, com centro na origem  $o \in R^n$ . A mesma fórmula que define  $j$ , define também um homeomorfismo  $\bar{j}: B'' \rightarrow B$ . O diagrama abaixo (onde a seta vertical indica a inclusão) é comutativo, pois  $f$  coincide com  $g$  em  $j(S^{n-1})$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{n-1} & \xrightarrow{j} & B-a & \xrightarrow{f} & R^n - b & \xrightarrow{\rho'} & S^{n-1} \\
 \downarrow & & & & \nearrow g & & \\
 B'' & \xrightarrow{\bar{j}} & B & & & & 
 \end{array}$$

Isto significa que  $h = \rho' f j: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  estende-se a uma aplicação contínua  $\bar{h}: \rho' g \bar{j}: B'' \rightarrow S^{n-1}$ . Então, pelo Corolário do Teorema 9, Cap. II,  $\gamma_a(f) = \text{gr}(\rho' f j) = 0$ .

Seja agora  $\gamma_a(f) = 0$  e tomemos uma bola fechada qualquer  $B = B^n(a; \varepsilon) \subset U$ . Temos  $\text{gr}(\rho' f j) = 0$ , com  $j = j_{a,\varepsilon}: S^{n-1} \rightarrow B - a$ . Pelo Teorema 8, Cap. II, concluímos que  $\rho' f j \simeq \text{const.}$  (\*). Considerando a equivalência homotópica  $j': S^{n-1} \rightarrow R^n - b$ , inversa de  $\rho'$ , temos

$j' \rho' \simeq \text{id}: R^n - b \rightarrow R^n - b$ . (\*\*). Segue-se das relações (\*) e (\*\*) que

$$fj = \text{id} \cdot (fj) \simeq j' \rho' fj \simeq j' \cdot \text{const.} = \text{const.} : S^{n-1} \rightarrow R^n - b.$$

Pela Proposição 1, Cap. II, vemos que  $fj: S^{n-1} \rightarrow R^n - b$  admite uma extensão  $h: B'' \rightarrow R^n - b$  (onde  $B''$  é a bola unitária). Considerando novamente o homeomorfismo  $\bar{j}: B'' \rightarrow B$ , definimos a aplicação  $g: U \rightarrow R^n - b$  pondo  $g(x) = f(x)$  se  $x \in U - \text{int}B$  e  $g(x) = h[\bar{j}^{-1}(x)]$  se  $x \in B$ . Verifica-se imediatamente que  $g$  é contínua e preenche os requisitos do enunciado.

## 6 Índice de uma singularidade isolada

Seja  $v: M \rightarrow \tau(M)$  um campo vetorial contínuo sobre uma variedade diferenciável  $M = M^n$ . Seja  $p \in M$  uma singularidade isolada de  $v$ , isto é,  $v_p = 0$  mas existe uma vizinhança  $V \ni p$  tal que  $v_q \neq 0$  para todo  $q \in V - p$ . Para definir o *índice* da singularidade  $p$ , tomaremos uma vizinhança  $V$  que seja domínio de um sistema de coordenadas  $x: V \rightarrow R^n$ . Sejam  $U = x(V) \subset R^n$  e  $a = x(p) \in U$ . Então, para todo ponto  $q \in V$ , temos

$$v_q = \sum_{i=1}^n \alpha^i(x(q)) \frac{\partial}{\partial x^i}(q)$$

onde, para cada  $i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha^i: U \rightarrow R$  é uma função contínua. Obtemos assim uma aplicação contínua  $f: U \rightarrow R^n$ , definida por  $f(u) = (\alpha^1(u), \dots, \alpha^n(u))$ ,  $u \in U$ . Como

$p$  é a única singularidade de  $v$  em  $V$ , temos  $f(u) = 0 \in R^n$  apenas para  $u = a$ , donde  $f(U - a) \subset R^n - 0$ .

O *índice* da singularidade  $p$  do campo  $v$  será definido como o grau local  $\gamma_a(f)$  da aplicação  $f: U - a \rightarrow R^n - 0$ . Devemos, em seguida, mostrar que o índice, como o definimos, não depende da escolha do sistema de coordenadas  $x$ .

Com efeito, seja  $y$  outro sistema de coordenadas, válido numa vizinhança do ponto  $p$ . Como o grau local depende apenas de uma vizinhança arbitrariamente pequena do ponto onde ele é tomado, podemos admitir que os sistemas de coordenadas  $x$  e  $y$  são definidos na mesma vizinhança  $V$  do ponto  $p \in M$  e que  $U = x(V)$  é uma bola de centro  $a = x(p)$ . Sejam  $W = y(V)$ ,  $b = y(p)$  e  $v_q = \sum \beta^i(y(q)) \frac{\partial}{\partial y^i}(q)$ ,  $q \in V$ . Fica definida a aplicação contínua  $g: W \rightarrow R^n$ , onde  $g(w) = (\beta^1(w), \dots, \beta^n(w))$ ,  $w \in W$ , com  $g(b) = 0$  e  $g(W - b) \subset R^n - 0$ . Devemos mostrar que  $\gamma_a(f) = \gamma_b(g)$ .

Ora, a fórmula de mudança de coordenadas de um vetor nos dá, para cada  $q \in V$  e  $i = 1, \dots, n$ :

$$\beta^i(y(q)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x(q)) \cdot \alpha^j(x(q)).$$

Se, para cada ponto  $u \in U$ , indicarmos com  $T_u = (y \circ x^{-1})_*$  a aplicação linear de  $R^n$ , induzida pelo difeomorfismo  $y \circ x^{-1}: U \rightarrow W$  no ponto  $u$ , as equações acima significam que  $g(y(q)) = T_{x(q)}[f(x(q))]$  para todo  $q \in V$ . Podemos ainda escrever esta relação sob a forma:

$$[g \circ (y \circ x^{-1})](u) = T_u(f(u)), \text{ para todo } u \in U. \quad (*)$$

Consideremos a aplicação  $Q: U - a \rightarrow R^n - 0$ , definida

por  $Q(u) = T_u(f(u))$ . A igualdade (\*) implica:

$$\gamma_b(g) \circ \gamma_a(y \circ x^{-1}) = \gamma_a(Q). \quad (**)$$

Por outro lado, a aplicação  $F: (U - a) \times I \rightarrow R^n - 0$ , definida por

$$F(u, t) = T_{(1-t)u+ta}(f(u)),$$

é uma homotopia  $F: Q \simeq T_a \cdot f: U - a \rightarrow R^n - 0$ , entre  $Q: U - a \rightarrow R^n - 0$  e a aplicação composta  $T_a \cdot f: U - a \rightarrow R^n - 0$ .

$$\begin{array}{ccc} U-a & \xrightarrow{y \cdot x^{-1}} & W-b \\ f \downarrow & \searrow Q & \downarrow g \\ R^n - 0 & \xrightarrow{T_a} & R^n - 0 \end{array}$$

Segue-se desta homotopia, que

$$\gamma_a(Q) = \gamma_0(T_a) \cdot \gamma_a(f). \quad (***)$$

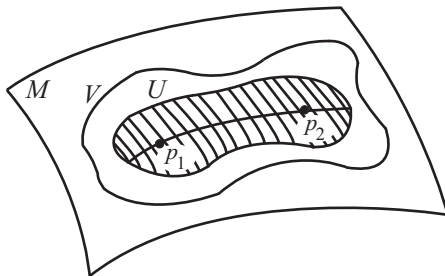
Mas  $T_a = (y \circ x^{-1})$ , é a aplicação linear induzida pelo difeomorfismo  $y \circ x^{-1}$  no ponto  $a$  da bola  $U$ . Logo,  $\gamma_0(T - a) = \gamma_a(y \circ x^{-1}) = \pm 1$ , como vimos no exemplo 3), dado acima. Assim, as igualdades (\*\*) e (\*\*\*) implicam  $\gamma_b(g) = \gamma_a(f)$ , como queríamos mostrar.

Indicaremos com  $I_v(p)$  o índice da singularidade isolada  $p$  do campo vetorial contínuo  $v$ .

Resulta imediatamente da definição, juntamente com o exemplo 3), que se  $p$  é uma singularidade simples do campo vetorial diferenciável  $v$ , então  $I_v(p)$  coincide com o índice anteriormente definido (vide §2).

**Teorema 9.** *Seja  $v$  um campo vetorial contínuo sobre uma variedade  $M = M^n$ . Sejam  $p_1, p_2 \in M$  duas singularidades isoladas de  $v$ . Dado um aberto conexo  $V \subset M$  tal que  $p_1, p_2 \in V$  são as únicas singularidades de  $v$  em  $V$ , existe um campo vetorial contínuo  $u$  sobre  $M$ , que coincide com  $v$  em  $M - V$ , e que admite apenas uma singularidade  $p$  em  $V$ . Além disso, temos  $I_u(p) = I_v(p_1) + I_v(p_2)$ .*

**Demonstração:** Como  $V$  é conexo, existe um sistema de coordenadas  $x: U \rightarrow R^n$ , válido num aberto  $U \subset V$ , tal que  $p_1, p_2 \in U$ , e  $x(U) = R^n$ . (Basta tomar uma imersão  $\varphi: R \rightarrow V$ , com  $p_1, p_2 \in \varphi(R)$ , e, em seguida, tomar  $U$  como uma vizinhança tubular de  $\varphi(R)$ , contida em  $V$ .)



Aplicando-se o argumento final do Lema 2, Cap. I, obtém-se o difeomorfismo  $x: U \rightarrow R^n$ . Sejam  $a_1 = x(p_1)$  e  $a_2 = x(p_2)$ . Consideremos uma bola fechada  $B = B^n(0, r)$ , contendo os pontos  $a_1$  e  $a_2$  em seu interior. A expressão  $v_q = \sum_{i=1}^n \alpha^i(x(q)) \frac{\partial}{\partial x^i}(q)$ ,  $q \in U$ , do campo  $v$  em termos do sistema de coordenadas  $x$ , nos fornece uma aplicação contínua  $f: R^n \rightarrow R^n$ ,  $f(z) = (\alpha^1(z), \dots, \alpha^n(z))$ ,  $z \in R^n$ , a qual assume o valor  $f(z) = 0 \in R^n$  apenas para  $z = a_1$  e  $z = a_2$ . Em particular,  $f(z) \neq 0$  sempre que  $|z| = r$ , isto



é, sempre que  $z$  pertença ao bordo de  $B$ . Definimos uma nova aplicação  $g: R^n \rightarrow R^n$ , pondo:

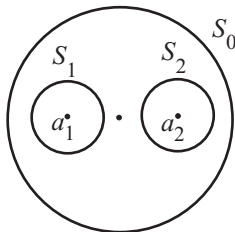
$$g(x) = \begin{cases} f(z), & \text{se } |z| \geq r; \\ |z| \cdot f\left(\frac{r}{|z|}z\right), & \text{se } 0 < |z| \leq r; \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Então  $g: r^n \rightarrow R^n$  é contínua, coincide com  $f$  fora da bola  $B$ , e assume o valor  $0 \in R^n$  somente no ponto  $0 \in R^n$ . Sejam  $\beta^1, \dots, \beta^n: R^n \rightarrow R^n$  as funções contínuas tais que  $g(z) = (\beta^1(z), \dots, \beta^n(z))$ , e definamos um campo vetorial  $u: M \rightarrow \tau(M)$ , pondo  $u_q = v_q$  se  $q \in M - U$ , e

$$u_q = \sum_{i=1}^n \beta^i(x(q)) \frac{\partial}{\partial x^i}(q)$$

se  $q \in U$ . É claro que  $u$  é contínuo, coincide com  $v$  em  $M - V$  e a única singularidade de  $u$  em  $V$  é o ponto  $p = x^{-1}(0)$ .

Em seguida, mostraremos que o índice  $I_u(p)$  é igual à soma  $I_v(p_1) + I_v(p_2)$ . Sejam  $B_1$  e  $B_2$  bolas disjuntas, de centros  $a_1$  e  $a_2$  respectivamente, contidas na bola  $B = B^n(0, r)$  há pouco considerada.



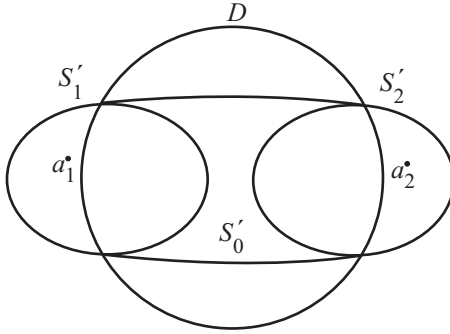
Sejam  $S_0, S_1, S_2$  as esferas que servem de bordo às bolas  $B, B_1, B_2$ . Indiquemos com  $j_0: S^{n-1} \rightarrow B-0$ ,  $j_1: S^{n-1} \rightarrow B_1-a_1$  e  $j_2: S^{n-1} \rightarrow B_2-a_2$  as equivalências homotópicas usuais. Temos

$$\begin{aligned} I_v(p_1) &= \text{gr}(\rho' f j_1), & I_v(p_2) &= \text{gr}(\rho' f j_2), \\ I_u(p) &= \text{gr}(\rho' g j_0) = \text{gr}(\rho' f j_0), \end{aligned}$$

a última igualdade sendo válida porque  $g|_{S_0} = f|_{S_0}$ ,  $S_0 = j_0(S^{n-1})$ . O resultado desejado segue-se então do lema abaixo.

**Lema 5.** *Sejam  $S_1, S_2 \subset R^n$  esferas mutuamente exteriores, de centros  $a_1, a_2$  respectivamente, contidas no interior de uma esfera  $S_0$ . Seja  $f: R^n - \{a_1, a_2\} \rightarrow S^{n-1}$  uma aplicação contínua, e ponhamos  $f_i = f|_{S_i}$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Se orientarmos igualmente as esferas  $S_i$ , teremos  $\text{gr}(f_0) = \text{gr}(f_1) + \text{gr}(f_2)$ .*

**Demonstração:** Suponhamos, em primeiro lugar, que  $f$  seja diferenciável. Seja  $D$  uma bola fechada contida em  $R^n - \{a_1, a_2\}$ , tal que  $f(D)$  não cubra toda a esfera  $S^{n-1}$ . Mediante uma deformação simples, podemos transformar as esferas dadas em superfícies alongadas, como elipsóides,  $S'_0, S'_1, S'_2$ , de modo que as esferas não toquem  $a_1$  nem  $a_2$  durante a deformação e, no final,  $S'_0$  coincida com  $S'_1 \cup S'_2$  fora de  $D$ . Mais precisamente, devemos ter  $S'_0 \cap \mathring{D} = (S'_1 \cap \mathring{D}) \cup (S'_2 \cap \mathring{D})$ , reunião disjunta. Evidentemente, teremos  $\text{gr}(f_i) = \text{gr}(f'_i)$ , onde  $f'_i = f|_{S'_i}$ ,  $i = 0, 1, 2$ , pois o grau não se altera por deformações. Seja agora  $c \in S^{n-1}$  um valor regular de  $f'_0$ , com  $c \in S^{n-1} - f(D)$ . Como  $S^{n-1} - f(D)$  é aberto e não vazio,  $c$  existe.



Além disso, como  $f^{-1}(c) \subset \mathbb{C} D$  e, fora de  $D$ ,  $f'_0$  coincide com  $f'_1$  ou com  $f'_2$ , vemos que  $c$  é valor regular de  $f'_1$  e de  $f'_2$ , e que

$$(f'_0)^{-1}(c) = (f'_1)^{-1}(c) \cup (f'_2)^{-1}(c),$$

(reunião disjunta!). Logo  $\text{gr}(f'_0) = \text{gr}(f'_1) + \text{gr}(f'_2)$ , o que fornece o resultado que procuramos.

Finalmente, consideremos o caso em que a aplicação  $f: R^n - \{a_1, a_2\} \rightarrow S^{n-1}$  é apenas contínua. Tomamos uma aplicação diferenciável  $g: R^n - \{a_1, a_2\} \rightarrow S^{n-1}$  tal que  $|f(x) - g(x)| < 2$  para  $x \in S_0 \cup S_1 \cup S_2$ . Pondo  $g_i = g|_{S_i}$ , vemos que  $g_i = f_i: S_i \rightarrow S^{n-1}$ , donde  $\text{gr}(g_i) = \text{gr}(f_i)$ , recaindo assim no caso anterior.

**Corolário 1.** *Seja  $v$  um campo vetorial contínuo sobre uma variedade diferenciável  $M$ , admitindo um número finito de singularidades  $p_1, \dots, p_m$ . Dado qualquer aberto conexo  $V$ , contendo todas estas singularidades, existe um campo vetorial contínuo  $u$  sobre  $M$ , que coincide com  $v$  em  $M - V$ , e que possui apenas uma singularidade  $p \in M$ , com*

$$I_u(p) = \sum_{i=1}^m I_v(p_i).$$

Com efeito, consideremos primeiro as singularidades  $p_1$  e  $p_2$ . Seja  $V_{12} \subset V$  um aberto conexo dentro do qual as únicas singularidades de  $v$  são  $p_1$  e  $p_2$ . Aplicando o Teorema 9, obtemos um campo contínuo  $u_1$  sobre  $M$ , coincidindo com  $v$  em  $M - V_{12}$  (donde em  $M - V$ ), o qual possui somente uma singularidade,  $q_2$ , em  $V_{12}$ , com  $I_{u_1}(q_2) = I_v(p_1) + I_v(p_2)$ . Em seguida, consideremos um aberto conexo  $V_{23}$  contendo  $q_2, p_3$ , e nenhuma outra singularidade de  $u_1$ . Aplicando novamente o teorema, obtemos um campo vetorial contínuo  $u_2$  sobre  $M$ , coincidindo com  $u_1$  em  $M - V_{23}$  (donde com  $v$  em  $M - V$ ), o qual possui apenas uma singularidade,  $q_3$ , em  $V_{23}$ , com  $I_{u_2}(q_3) = I_v(p_1) + I_v(p_2) + I_v(p_3)$ . Prosseguindo analogamente, obteremos no final um campo contínuo  $u = u_{m-1}$  sobre  $M$ , o qual coincide com  $v$  em  $M - V$ , e admite apenas uma singularidade  $p = q_m$  em  $M$ , sendo seu índice  $I_u(p) = \sum_{i=1}^m I_v(p_i)$ .

**Corolário 2.** *Em toda variedade compacta existe um campo vetorial contínuo com apenas uma singularidade.*

Com efeito, dada a variedade compacta  $M$ , existe sempre sobre  $M$  um campo vetorial contínuo (e mesmo diferenciável) com um número finito de singularidades: basta tomar um campo contínuo  $w$  qualquer sobre  $M$  (por exemplo,  $w_q = 0$  para todo  $q \in M$ ) e aproximá-lo por um campo diferenciável  $v$  cujas singularidades são todas simples (vide Teorema 4). As singularidades de  $v$  sendo isoladas, e sendo  $M$  compacta, elas são em número finito. Aplicamos o Corolário 1 ao campo  $v$  e obtemos  $u$  com apenas uma singularidade.

**Observação:** Em toda variedade compacta  $M$ , existe mesmo um campo vetorial *diferenciável* com apenas uma singularidade. Para obter este resultado, usa-se o mesmo princípio da demonstração do Corolário 1, com uma modificação apenas. Começamos com um campo vetorial diferenciável  $v$ , com apenas um número finito de singularidades, o qual existe sobre  $M$ , como vimos na demonstração do Corolário 2. Em seguida aplicamos o Teorema 9 repetidas vezes, como no Corolário 1, para obter um campo  $u$  com uma singularidade apenas. A dificuldade que surge é que a demonstração do Teorema 9 não fornece um campo diferenciável  $u$ , mesmo quando partimos de um campo diferenciável  $v$ . De fato, a aplicação  $g: R^n \rightarrow R^n$  (vide demonstração do Teorema 9) não combina necessariamente com o valor de  $v$  fora de  $U$  para dar um campo diferenciável  $u$ . Mas é possível modificar a construção de  $g$  e obter este desideratum. (Basta, na definição de  $g$ , por  $g(z) = \xi\left(\frac{|z|^2}{r^2}\right) \cdot f(r \cdot z/|z|)$ , onde  $\xi$  é a função considerada no Lema 1, §2, Cap. II).

**Teorema 10.** *Seja  $v$  um campo vetorial contínuo sobre uma variedade compacta  $M$ , com um número finito de singularidades  $p_1, \dots, p_m$ . Tem-se  $I_v(p_1) + \dots + I_v(p_m) = \chi(M) =$  característica de Euler de  $M$ .*

**Demonstração:** Pelo Corolário 1, existe um campo vetorial contínuo  $u$  sobre  $M$ , que possui somente uma singularidade  $p$ , com  $I_u(p) = \sum_{i=1}^m I_v(p_i)$ . Devemos então mostrar que  $I_u(p) = \chi(M)$ . Seja  $x: V \rightarrow R^n$  um sistema de coordenadas em  $M$ , com  $p \in V$ , e tal que  $x(V) = R^n$ . Tomemos uma bola fechada  $B \subset R^n$ , de centro  $a = x(p)$ , e chamemos

de  $S$  a esfera que serve de bordo a  $B$ . Aplicando o Teorema 4, tomemos um campo vetorial diferenciável  $w$  sobre  $M$ , que possui somente singularidades simples, e está tão próximo de  $u$  que satisfaz as condições seguintes:

1<sup>o</sup>) Não existem singularidades de  $w$  em  $M - x^{-1}(\text{int}B)$

2<sup>o</sup>) Se  $f, g: R^n \rightarrow R^n$  são as aplicações definidas por  $f(z) = (\alpha^1(z), \dots, \alpha^n(z))$ ,  $g(z) = (\beta^1(z), \dots, \beta^n(z))$ , onde  $u = \sum \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  e  $w = \sum \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  em  $V$ , então  $|f(z)/|f(z)| - g(z)/|g(z)|| < 2$  para todo  $z \in S = \text{bordo de } B$ .

A última condição significa que  $\rho'f(z)$  e  $\rho'g(z)$  nunca são antípodas, qualquer que seja  $z \in S$ . Ou seja,  $\rho'fj \simeq \rho'gj: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  (na notação introduzida no §5). Por conseguinte,

$$I_u(p) = \gamma_a(f) = \text{gr}(\rho'fj) = \text{gr}(\rho'gj).$$

Assim,  $I_u(p)$  é igual ao grau de restrição  $(\rho'g)|_S$ , onde  $g$  é definida pelo campo  $w$  em termos do sistema de coordenadas  $x$ . Ora,  $w$  possui apenas um número finito de singularidades  $q_1, \dots, q_n$  em  $M$ , as quais pertencem a  $x^{-1}(\text{int}B)$ . Além disso, estas singularidades são todas simples, de modo que  $\sum_i I_w(q_i) = \chi(M)$ . Sejam  $a_1 = x(q_1), \dots, a_r = x(q_r) \in \text{int}B$ . Tomemos pequenas esferas disjuntas  $S_i$ , de centro  $a_i$ , contidas em  $S$ . Considerando a aplicação

$$h = \rho'g: R^n - \{a_1, \dots, a_r\} \rightarrow S^{n-1},$$

temos  $I_u(p) = \text{gr}(h|_S)$  e  $I_w(q_i) = \text{gr}(h|_{S_i})$ . Assim,  $\chi(M) = \sum_i \text{gr}(h|_{S_i})$ . Mas, pelo Lema 5, (evidentemente generalizável para  $r > 2$ ) vale  $\text{gr}(h|_S) = \sum_i \text{gr}(h|_{S_i})$ , o que implica  $\chi(M) = I_u(p)$ , como queríamos demonstrar.

**Teorema 11.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável compacta. Existe um campo vetorial contínuo sem singularidades sobre  $M$  se, e somente se,  $\chi(M) = 0$ .*

**Observação:** Pelo Corolário do Teorema 2, existe um campo vetorial contínuo sem singularidades sobre  $M$  se, e somente se, existe um campo vetorial diferenciável sem singularidades.

**Demonstração:** Metade do teorema é óbvia. Suponhamos então que  $\chi(M) = 0$ . Então existe um campo vetorial diferenciável  $v$  sobre  $M$ , cujas singularidades  $p_1, \dots, p_m$  são todas simples, e  $\sum_{i=1}^m I_v(p_i) = \chi(M) = 0$ . Usando o Corolário 1, obtemos um campo contínuo  $u$  sobre  $M$ , com uma única singularidade  $p \in M$ , tal que  $I_p(u) = 0$ . Seja  $x: V \rightarrow R^n$  um sistema de coordenadas, com  $p \in V$  e  $x(V) = R^n$ . Seja  $u_q = \sum \alpha^i(x(q)) \frac{\partial}{\partial x^i}(q)$ ,  $q \in V$ . Isto define uma aplicação  $f: R^n \rightarrow R^n$ , onde  $f(z) = (\alpha^1(z), \dots, \alpha^n(z))$ . Para  $a = x(p)$ , temos  $f(a) = 0 \in R^n$ ,  $f(R^n - a) \subset R^n - 0$ , e  $\gamma_a(f) = 0$ . Tomemos uma bola fechada  $B$  de centro  $a$ , em  $R^n$ . Pelo Teorema 8, existe uma aplicação contínua  $g: R^n \rightarrow R^n - 0$ , que coincide com  $f$  em  $R^n - \text{int}B$ . Seja  $g(z) = (\beta^1(z), \dots, \beta^n(z))$ ,  $z \in R^n$ . Definamos um campo vetorial  $w$  sobre  $M$ , pondo  $w_q = v_q$  se  $q \in M - x^{-1}(B)$  e  $w_q = \sum \beta^i(x(q)) \frac{\partial}{\partial x^i}(q)$ , se  $q \in x^{-1}(B)$ . Então o campo  $w$  é contínuo e não possui singularidades.

**Observação:** Os Teoremas 10 e 11 valem unicamente para variedades compactas. Se  $M$  é uma variedade não compacta, dado um inteiro  $k$  qualquer, existe em  $M$  um campo vetorial contínuo, com um número finito de singularidades (até mesmo uma singularidade, se quisermos) cuja soma

dos índices é igual a  $k$ . Do mesmo modo, em qualquer variedade não compacta é possível definir um campo vetorial contínuo sem singularidades.



# Capítulo IV

## Curvatura Integral

### 1 Introdução

A finalidade deste capítulo é demonstrar o “Teorema da Curvatura Íntegra” de Hopf, segundo o qual a integral (convenientemente normalizada) da curvatura gaussiana de uma subvariedade compacta  $M^n$  do espaço euclidiano  $R^{n+1}$ ,  $n$  par, é igual à metade da característica de Euler de  $M$ . Este teorema, que se situa na linha das idéias introduzidas por Gauss em Geometria Diferencial, e completa um dos seus resultados mais importantes, constitui, ademais, um dos mais simples e expressivos exemplos das relações existentes entre a Topologia e a Geometria Diferencial.

No caso elementar de uma superfície compacta  $M^2$ , contida no espaço euclidiano ordinário  $R^3$ , o teorema em questão decorre imediatamente do clássico teorema de Gauss-Bonnet, que fornece a integral da curvatura gaussiana sobre um domínio simplesmente conexo de  $M^2$ , em termos da curvatura geodésica ao longo do bordo desse

domínio. Exposições desse caso particular encontram-se em quase todos os textos de Geometria Diferencial. (Vejam-se, por exemplo, [1] e [10]).

A demonstração original do “Teorema da Curvatura Íntegra” encontra-se na tese de Hopf [8].

Ela se baseia na fórmula que exprime o “número algébrico” de coincidências de duas aplicações  $f, g: M^n \rightarrow S^n$  como  $\text{gr}(f) + (-1)^n \text{gr}(g)$ . Ao escrever sua tese, Hopf suspeitava, mas não tinha ainda demonstrado, que a soma dos índices das singularidades de um campo vetorial sobre uma variedade  $M$  é igual à característica de Euler  $\chi(M)$  (definida como a soma alternada dos números de Betti de  $M$ ). Este resultado foi obtido por ele logo depois, e publicado no volume seguinte do *Mathematische Annalen* [9]. A demonstração do Teorema da Curvatura Íntegra, que daremos aqui, usa o teorema sobre as singularidades de um campo vetorial, em vez do índice de coincidência. Na realidade, porém, todos esses fatos pertencem ao mesmo domínio de idéias, que giram em torno das noções de “interseção” e “transversalidade”, as quais se originaram de Brouwer, e alcançaram forma matemática definitiva com a teoria geral dos pontos fixos e coincidências de Lefschetz.

## 2 Curvatura gaussiana de uma hipersuperfície

Seja  $M^n \subset R^{n+1}$  uma hipersuperfície (isto é, uma subvariedade diferenciável, de dimensão  $n$ ) compacta e orientável do espaço euclidiano  $R^{n+1}$ . Observaremos, sem demonstrar, que a orientabilidade de toda hipersuperfície *compacta*

é um teorema, e não uma hipótese. (Vide [21], pag. 433). Entretanto, como a demonstração desse teorema nos afastaria demasiadamente do rumo traçado, preferimos tomar a orientabilidade como hipótese e indicar ao leitor onde a demonstração pode ser encontrada.

Fixaremos, de uma vez por todas, uma orientação em  $M$ . Isto equivale, como se sabe, (vide [13], pag. 64) a definir um campo diferenciável de vetores normais unitários sobre  $M$ . Indicaremos com  $\gamma(p)$  o vetor unitário desse campo que corresponde ao ponto  $p \in M$ . Assim,  $\gamma: p \rightarrow \gamma(p)$  define uma aplicação diferenciável  $\gamma: M^n \rightarrow R^{n+1}$  tal que, para todo  $p \in M$ ,  $\gamma(p) \in M_p^\perp$ , isto é,  $\gamma(p)$  é um vetor de  $R^{n+1}$ , perpendicular a todos os vetores tangentes  $v \in M_p$ . Como  $|\gamma(p)| = 1$ , temos, na realidade, uma aplicação diferenciável

$$\gamma: M^n \rightarrow S^n$$

de  $M^n$  na esfera unitária  $S^n \subset R^{n+1}$ . (Se imaginássemos o vetor normal como localizado no ponto  $p$ , diríamos que  $\gamma: M^n \rightarrow S^n$  associa, a cada ponto  $p \in M$ , o vetor localizado na origem  $0 \in R^{n+1}$  e paralelo ao vetor normal dado pela orientação no ponto  $p$ . Do modo como estamos procedendo, todos os vetores são “livres”, o que dá no mesmo que supô-los todos localizados na origem  $0 \in R^{n+1}$ . Assim, por exemplo, o espaço tangente  $M_p$  é, para nós um subespaço vetorial de  $R^{n+1}$ , passando portanto pela origem  $0$ , e não uma variedade afim contendo o ponto  $p$ ).

A aplicação diferenciável  $\gamma: M^n \rightarrow S^n$ , definida pelo campo de vetores normais unitários associado à orientação de  $M^n$ , chama-se a *aplicação normal de Gauss*.

A propriedade mais importante da aplicação normal  $\gamma$  é que, para todo  $p \in M$ , o espaço vetorial tangente  $M_p$  e

o espaço vetorial tangente  $(S^n)_{\gamma(p)}$ , tangente à esfera no ponto  $\gamma(p)$ , coincidem como subespaços vetoriais de  $R^{n+1}$ . Com efeito,  $(S^n)_{\gamma(p)}$  é ortogonal a  $\gamma(p)$ , pois todo vetor tangente à esfera  $S^n$  no ponto  $\gamma(p)$  é perpendicular ao raio.

Assim, em cada ponto  $p \in M$ , a aplicação linear  $\gamma_*: M_p \rightarrow (S^n)_{\gamma(p)}$ , induzida por  $\gamma$ , é na realidade uma aplicação linear de um espaço vetorial em si próprio:

$$\gamma_*: M_p \rightarrow M_p.$$

Como tal,  $\gamma_*$  possui algumas propriedades particulares. Por exemplo, podemos definir o determinante da aplicação linear  $\gamma_*$ , e, cada ponto  $p \in M$ , sem que o valor desse determinante venha a depender da escolha de uma base em  $M_p$ .

A *curvatura gaussiana* da hipersuperfície  $M^n \subset R^{n+1}$  é a função real

$$K: M \rightarrow R$$

tal que, para cada  $p \in M$ ,  $K(p) =$  determinante de  $\gamma_*: M_p \rightarrow M_p$ . É claro que a curvatura gaussiana é uma função real diferenciável definida em  $M^n$ .

**Observação:** Verifica-se facilmente que, quando  $n$  é par, a curvatura gaussiana  $K$  não depende da orientação escolhida em  $M$ , mas, quando  $n$  é ímpar, a mudança da orientação de  $M$  acarreta uma troca de sinal de  $K$ .

Recordamos que, se  $E$  é um espaço vetorial (real) munido de um produto interno, uma aplicação linear  $T: E \rightarrow E$  diz-se *auto-adjunta* (ou *simétrica*) se, para cada par de vetores  $u, v \in E$ , tem-se  $u \cdot Tv = Tu \cdot v$ , onde o ponto indica o produto interno em  $E$ .

Lembramos também que um número real  $k$  diz-se um *valor próprio* da aplicação linear  $T: E \rightarrow E$  se existe um vetor  $v \neq 0$  em  $E$  tal que  $Tv = kv$ . Neste caso, o vetor  $v$  diz-se um *vetor próprio* de  $T$ , pertencente ao valor próprio  $k$ . O teorema fundamental a respeito das aplicações lineares auto-adjuntas  $T: E \rightarrow E$  afirma que, dada uma delas,  $T$ , existe em  $E$  uma base ortonormal  $\{v_1, \dots, v_n\}$  formada por vetores próprios de  $T$ . (Vide [6], pag. 156). Os números  $k_1, \dots, k_n$  tais que  $Tv_i = k_i \cdot v_i$  podem não ser todos distintos, mas usaremos sempre a numeração de forma que  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ . Como se sabe, o produto  $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$  é igual ao determinante de  $T$ .

**Teorema 1.** *A aplicação linear  $\gamma_*: M_p \rightarrow M_p$ , induzida pela aplicação normal de Gauss, é auto-adjunta, para todo  $p \in M$ .*

**Demonstração:** Basta verificar a igualdade  $u \cdot \gamma_*(v) = \gamma_*(u) \cdot v$  quando  $u$  e  $v$  descrevem uma base fixa de  $M_p$ . Para isto, consideraremos uma parametrização  $\varphi: A^n \rightarrow U$  de uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$ , sendo  $A^n$  um aberto de  $R^n$ . Como sabemos, os vetores  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = (\partial \varphi^1 / \partial x^i, \dots, \partial \varphi^n / \partial x^i) \in R^n$ , constituem uma base de  $M_p$  (derivadas calculadas no ponto  $p$ ). Dado  $(x^1, \dots, x^n) \in A^n$ , escreveremos  $\gamma(x^1, \dots, x^n)$  em vez de  $\gamma(\varphi(x^1, \dots, x^n))$  por um abuso de notação que nos levará a escrever  $\gamma: A^n \rightarrow S^n$ , em vez de  $\gamma \cdot \varphi: A^n \rightarrow S^n$ . Temos então  $\gamma(q) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(q) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , e  $q \in A^n$ . Derivando em relação a  $x^j$ , obtemos

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \gamma \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} = 0$$

em todo ponto  $q \in A^n$ , e para  $i, j = 1, \dots, n$ . Como  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^i}$ , concluímos daí que  $\frac{\partial \gamma}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} =$

$-\gamma \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}$ , para todos os valores de  $i$  e  $j$ . Como  $\gamma_* \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial x^i}$  e  $\gamma_* \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial x^j}$ , segue-se que

$$\gamma_* \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \cdot \gamma_* \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right),$$

o que conclui a demonstração do teorema.

Em cada ponto  $p \in M$ , temos portanto os  $n$  valores próprios (nem todos distintos)  $k_1(p) \geq k_2(p) \geq \dots \geq k_n(p)$  da aplicação linear auto-adjunta  $\gamma_*: M_p \rightarrow M_p$ . O valor próprio  $k_i(p)$  chama-se a  $i$ -ésima curvatura principal de  $M$  no ponto  $p$ . A curvatura gaussiana  $K(p)$  satisfaz portanto, em todo ponto  $p \in M$ , a condição:

$$K(p) = k_1(p) \cdot k_2(p) \dots k_n(p).$$

A título de ilustração, observaremos que a *segunda forma quadrática de  $M$*  é a correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  a forma quadrática  $II_p$ , definida em  $M_p$  pela fórmula:

$$-II_p(u) = u \cdot \gamma_*(u), \quad u \in M_p.$$

Em termos de uma parametrização  $\varphi: A^n \rightarrow U$ , de uma vizinhança  $U$  do ponto  $p$  em  $M$ , se  $u = \sum \alpha^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ , então  $\gamma_*(u) = \sum \alpha^j \frac{\partial \gamma}{\partial x^j}$ , donde

$$\begin{aligned} -II_p(u) &= u \cdot \gamma_*(u) = \sum \alpha^i \alpha^j \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x^j} \\ &= - \sum \alpha^i \alpha^j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \cdot \gamma \end{aligned}$$

ou seja

$$II_p(u) = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} (p) \cdot \gamma \right) \alpha^i \alpha^j$$

o que generaliza a fórmula clássica da 2a. forma quadrática de uma superfície  $M^2 \subset R^3$ .

### 3 O grau da aplicação normal

Como subvariedades do espaço euclidiano  $R^{n+1}$ ,  $M^n$  e  $S^n$  estão dotadas de métricas riemannianas naturais, o produto interno em cada espaço vetorial tangente sendo induzido pelo produto interno existente em  $R^{n+1}$ .

Indicaremos com  $\omega$  o elemento de volume de  $M^n$  e com  $\sigma$  o elemento de volume da esfera  $S^n$ . Escreveremos  $c_n = \int_{S^n} \sigma$  para indicar o volume da esfera  $S^n$ . Como se sabe, tem-se  $c_1 = 2\pi$ ,  $c_2 = 4\pi$  e, para  $n \geq 3$ ,  $c_n$  admite uma expressão conhecida, em termos da função gama. (Vide Courant, Differential and Integral Calculus, vol. II, página 303).

Pelos resultados do Capítulo II, o grau da aplicação normal  $\gamma: M^n \rightarrow S^n$  é igual a  $\frac{1}{c_n} \int_M \gamma^* \sigma$ . Vamos agora exprimir este grau em função da curvatura gaussiana de  $M$ .

Em primeiro lugar, observaremos que em  $M^n$  (como, de resto, em qualquer variedade riemanniana orientada) podemos integrar não somente formas diferenciais de grau  $n$  como também funções reais  $f: M^n \rightarrow R$ . Basta usar o elemento de volume  $\omega$  de  $M$  e definir a integral  $\int_M f(p) dp$  de  $f$  sobre  $m$  pela igualdade:

$$\int_M f(p) dp = \int_M f \cdot \omega,$$

onde  $f \cdot \omega$  é a forma diferencial tal que  $(f \cdot \omega)_p = f(p) \cdot \omega_p$ , para todo  $p \in M$ .

Assim, podemos definir a *curvatura integral* (ou “curvatura íntegra”) da hipersuperfície  $M^n \subset R^n$  como a integral

$$\int_M K(p) dp$$

da curvatura gaussiana de  $M$  estendida a toda a variedade  $M$ .

O teorema abaixo fornece a expressão procurada do grau da aplicação normal  $\gamma$ .

**Teorema 2.** *O grau da aplicação normal  $\gamma: M^n \rightarrow S^n$  é igual a*

$$\frac{1}{c_n} \int_M K(p) dp, \quad c_n = \text{volume de } S^n.$$

**Demonstração:** Basta mostrar que, em todo ponto  $p \in M$ , tem-se  $K(p) \cdot \omega_p = (\gamma^* \sigma)_p$ . Tomemos  $n$  vetores  $v_1, \dots, v_n$  em  $M_p$ . Lembremos aqui um fato de Álgebra Linear: dada uma aplicação linear  $T: E \rightarrow E$ , onde  $E$  é um espaço vetorial munido de um produto interno, e indicando com  $\text{vol}[u_1, \dots, u_n]$  o volume orientado do paralelepípedo gerado pelos vetores  $u_i$ , tem-se  $\text{vol}[Tv_1, \dots, Tv_n] = \det(T) \cdot \text{vol}[v_1, \dots, v_n]$ . Assim sendo, vale sucessivamente:

$$\begin{aligned} (\gamma^* \sigma)_p(v_1, \dots, v_n) &= \sigma_{\gamma(p)}(\gamma_*(v_1), \dots, \gamma_*(v_n)) \\ &= \text{vol}[\gamma_*(v_1), \dots, \gamma_*(v_n)] = \det(\gamma_*) \cdot \text{vol}[v_1, \dots, v_n] \\ &= K(p) \cdot \omega_p(v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

Como esta igualdade é válida para  $p \in M$  e  $v_1, \dots, v_n \in M_p$  arbitrários, concluímos que  $K \cdot \omega = \gamma^* \sigma$ , o que demonstra o teorema.



## 4 O Teorema da Curvatura Íntegra

Demonstraremos, agora, o resultado principal deste capítulo.

**Teorema 1.** *Seja  $n$  um número par e  $M^n \subset \tilde{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície compacta (orientada) de dimensão  $n$ , cuja curvatura gaussiana em cada ponto  $p$  indicaremos com  $K(p)$ .*

*Então*

$$\frac{1}{c_n} \int_M K(p) dp = \frac{1}{2} \chi(M),$$

onde  $c_n = \text{volume de } S^n$  e  $\chi(M)$  é a característica de Euler de  $M$ .

**Demonstração:** Sejam  $a, b \in S^n$  pontos antípodas tais que ambos são valores regulares da aplicação normal  $\gamma: M^n \rightarrow S^n$ . (Para obter  $a$  e  $b$ , basta considerar a projeção canônica  $\pi: S^n \rightarrow P^n$ , de  $S^n$  sobre o espaço projetivo  $P^n$ , tomar um valor regular  $d \in P^n$  da aplicação composta  $\pi \cdot \gamma: M^n \rightarrow P^n$ , e pôr  $\{a, b\} = \pi^{-1}(d)$ ). Seja  $u$  um campo vetorial diferenciável em  $S^n$ , cujas únicas singularidades são os pontos  $a$  e  $b$ , ambos positivos, ou seja, com índices iguais a  $+1$ . A hipótese de que  $n$  é par intervém precisamente para assegurar a existência do campo  $u$ . Definamos, em seguida, um campo vetorial diferenciável  $v$  em  $M$ , pondo  $v_p = u_{\gamma(p)}$  para todo  $p \in M$ . Como  $(S^n)_{\gamma(p)} = M_p$ ,  $v$  está bem definido. Como  $u$  anula-se apenas nos pontos  $a, b \in S^n$ , segue-se que  $v$  se anula somente nos pontos  $p \in M$  tais que  $\gamma(p) = a$ , ou  $\gamma(p) = b$ . Ou seja, as singularidades de  $v$  em  $M$  são os pontos dos conjuntos  $\{a_1, \dots, a_r\} = \gamma^{-1}(a)$  e  $\{b_1, \dots, b_s\} = \gamma^{-1}(b)$ . Ora, na vizinhança de cada um dos pontos  $a_i$  e  $b_j$ ,  $\gamma$  é um difeomorfismo, pois  $a$  e  $b$  são valores regulares de  $\gamma$ . Segue-se

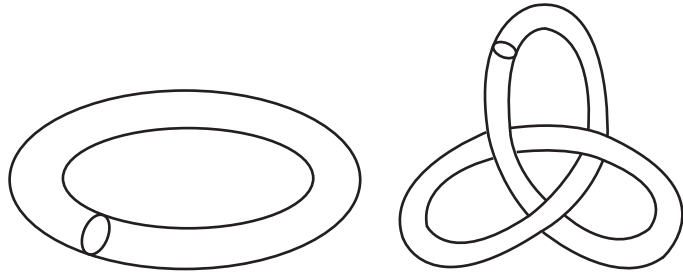
que os pontos  $a_i$  e  $b_j$  são todos singularidades simples do campo  $v$ . É claro que cada um desses pontos é positivo ou negativo relativamente ao campo  $v$  se, e somente se, o é relativamente à aplicação  $\gamma$ . Concluimos, então, que o “número algébrico” de singularidades de  $v$  é igual ao “número algébrico” de pontos  $a_i$  mais o “número algébrico” de pontos  $b_j$  relativamente a aplicação  $\gamma$ . Pela definição da característica de Euler, e pela definição de grau, isto significa que  $\chi(M) = \text{gr}_a(\gamma) + \text{gr}_b(\gamma) = 2 \cdot \text{gr}(\gamma)$ . Tendo em vista o Teorema 2, podemos escrever

$$\chi(M) = \frac{2}{c_n} \int_M K(p) dp,$$

o que demonstra o teorema.

## 5 Observações a respeito do teorema

1. Quando uma variedade  $M^n$  pode ser imersa em  $R^{n+1}$ , esta imersão pode ser feita numa infinidade de maneiras distintas. (A figura abaixo mostra uma imersão do toro em  $R^3$ , bem diferente da imersão usual).



Ao variar a imersão de  $M^n$  em  $R^{n+1}$ , a curvatura gaussiana  $K: M^n \rightarrow R$  muda consideravelmente. Entretanto, o Teorema 3 afirma que, quando  $M$  é compacta, orientável e de dimensão par, a integral  $\int_M K(p)dp$  depende apenas da topologia de  $M$ , e não da maneira particular como  $M$  se contorce dentro do espaço euclidiano  $R^{n+1}$ .

2. O Teorema 3 vale ainda em circunstâncias mais gerais, quando, em vez de uma imersão  $M^n \subset R^{n+1}$ , tem-se apenas uma aplicação regular  $f: M^n \rightarrow R^{n+1}$  (isto é, para cada  $p \in M$ , a aplicação linear  $f_*: M_p \rightarrow R^{n+1}$  é biunívoca, embora  $f$  não o seja necessariamente), supondo ainda  $M^n$  compacta e orientada. Neste caso, a orientação de  $M$  define ainda um campo de “vetores normais”  $\gamma: M^n \rightarrow S^n$  onde, para cada  $p \in M$ ,  $\gamma(p)$  é o único vetor unitário em  $R^{n+1}$  que é perpendicular a  $f_*(M_p)$  e tal que, se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base positiva de  $M_p$ ,  $\{f_*(e_1), \dots, f_*(e_n), \gamma(p)\}$  é uma base positiva de  $R^{n+1}$ . Uma vez definida a aplicação normal  $\gamma$ , a curvatura gaussiana  $K$  de  $M$  define-se como no caso anterior, e a demonstração do Teorema 3 se faz da mesma maneira.

3. Um problema natural seria o de indagar o que acontece quando a dimensão  $n$  da hipersuperfície  $M^n$  é ímpar. Uma resposta para esta questão foi obtida por Hopf. (Vide a exposição de Milnor [17]). Quando  $n$  é ímpar, o grau de aplicação normal  $\gamma: M^n \rightarrow S^n$  não é um invariante topológico da variedade  $M$ , depende da maneira como  $M^n$  está imersa em  $R^{n+1}$ . Mais precisamente, se for possível obter uma imersão  $M^n \subset R^{n+1}$  tal que  $\gamma$  tem grau par, então é possível obter imersões de  $M^n$  em  $R^{n+1}$  que dão como grau qualquer outro número par escolhido. Do mesmo modo,

se existe uma imersão  $M^n \subset R^{n+1}$  tal que o grau de  $\gamma$  é ímpar então, dado um número ímpar qualquer, existe uma imersão de  $M^n$  em  $R^{n+1}$  que tem esse número como grau de  $\gamma$ .

4. Outro problema natural seria o seguinte. Dada uma imersão  $M^n \subset R^{n+k+1}$  (ou mesmo, mais geralmente, uma aplicação regular  $f: M^n \rightarrow R^{n+k+1}$ ), onde  $M$  é uma variedade compacta orientada, podemos considerar o espaço fibrado  $\nu(M)$ , formado pelos pares  $(p, v)$ , tais que  $p \in M$  e  $v$  é um vetor unitário de  $R^{n+k+1}$ , perpendicular a  $M_p$ . O espaço  $\nu(M)$  é uma variedade compacta orientada, de dimensão  $n + k$ . (Vide [13], pags. 154 e 162). Existe uma aplicação normal  $\gamma: \nu(M) \rightarrow S^{n+k}$ , definida por  $\gamma(p, v) = v$ . A pergunta surge: qual é o grau de  $\gamma$ ? Chern demonstrou que, quando  $k > 0$ , o grau de  $\gamma$  é igual à característica de Euler  $\chi(M)$ . Uma exposição deste resultado, feita por Lashof e Smale, acha-se em [12]. (Observamos que o fato 1/2, que aparece no Teorema 3, corresponde ao fato de, para  $k = 0$ , possuir o espaço fibrado  $\nu(M)$  duas componentes conexas, ambas difeomorfas a  $M$ ). Assim, o único caso em que o grau de  $\gamma$  não é um invariante topológico de  $M$  é quando  $n$  é ímpar e  $k = 0$ . Para relações entre a “curvatura integral” de  $M^n \subset R^{n+k+1}$  e a topologia de  $M$ , veja-se Chern e Lashof [5].



## Referências Bibliográficas

- [1] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 3a. ed. Springer, Berlim, 1930.
- [2] N. Bourbaki, Topologie Générale – Chapitre I, II, 2a. ed. Hermann, Paris 1951; Chapitre X, 1a. ed. Hermann, Paris 1949.
- [3] N. Bourbaki, Algèbre – Chapitre III (Algèbre Multilinéaire) 1a. ed. Hermann, Paris, 1948.
- [4] S.S. Chern, Differentiable Manifolds (Textos de Matemática no. 5) Instituto de Física e Matemática da Universidade de Recife.
- [5] S.S. Chern e R.E. Lashof, On the total curvature of immersed manifolds. American Journal of Mathematics, vol. 79 (1957), pp. 306-318.
- [6] P.R. Halmos, Finite Dimensional Vector Spaces, 2a. ed. Van Nostrand, New York, 1958.
- [7] C.S. Höning, Álgebra Multilinear e Variedades Diferenciáveis, São Paulo, 1957.
- [8] H. Hopf, Über die Curvatura Integra geschlossener Hyperflacher, Mat. Annalen 95 (1925), pp. 340-367.
- [9] H. Hopf, Vektorfelder in Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 96 (1927), pp. 225-250.
- [10] H. Hopf, Lectures on Differential Geometry in the Large, Stanford University, 1956.
- [11] E.D. Júdice, O Teorema de Sard e suas Aplicações. (Em preparação).
- [12] R.K. Lashof e S. Smale, On the immersion of manifolds in Euclidean space. Annals of Math. vol. 68 (1958), pp. 562-583.
- [13] E.L. Lima, Introdução às Variedades Diferenciáveis. Instituto de Matemática da Univ. do R.G. do Sul, Porto Alegre, 1960.

- [14] E.L. Lima, Teoria de Morse – Atas do 2º Colóquio Bras. de Matemática, S. Paulo, 1961, pp. 99-124.
- [15] J. Milnor, Differential Topology. Princeton University, 1958 (notes by J. Munkres).
- [16] J. Milnor, Lectures on Characteristic Classes. Princeton University, 1957 (notes by James Stasheff).
- [17] J. Milnor, On the immersion of manifolds in  $(n + 1)$ -space. Comm. Math. Helv. vol. 30 (1956), pp. 275-284.
- [18] M. Nagumo, A theory of degree of mapping based on infinitesimal analysis, American Journal of Math. vol. 73 (1951), pp. 486-496.
- [19] L.S. Pontrjagin, Smooth manifolds and their applications in homotopy theory. Am. Math. Soc. Translations, vol. 11.
- [20] G. de Rham, Variétés Différentiables. Hermann, Paris, 1956.
- [21] H. Seifert e W. Threlfall, Lecciones de Topologia, Publicaciones del Instituto Jorge Juan de Matemáticas, Madrid, 1951.
- [22] N. Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton Univ. Press, Princeton, 1951.
- [23] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Commentarii Math. Helv. vol. 28 (1954), pp. 17-86.
- [24] R. Thom, Singularities of differentiable mappings, I. Mathematisches Institut der Universitat, Bonn, 1960 (notes by H. Levine).
- [25] H. Whitney, Geometrie Integration Theory, Princeton Univ. Press, Princeton, 1957.